Problemas de Geometría Algebraica

Hoja 1 – Variedades algebraicas

1. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ un conjunto algebraico afín. Probar que si $(a_1, \ldots, a_n) \notin V$, entonces existe $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $f(a_1, \ldots, a_n) = 1$ y $f(p) = 0$ para todo $p \in V$.

2. Sea $k = \mathbb{R}$. Probar que todo conjunto algebraico afín $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ es una hipersuperficie (sugerencia: si $V = V(f_1, \ldots, f_m)$, buscar g tal que $V(g) = \{(0, \ldots, 0)\}$, y considerar $f = g(f_1, \ldots, f_m)$).

3. Sean $a_1, \ldots, a_n$ elementos de k. Probar que $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ es un ideal maximal de $k[x_1, \ldots, x_n]$.

4. Demostrar que:

   (a) si A es un anillo noetheriano e I es un ideal de A, entonces el anillo cociente A/I también es noetheriano;

   (b) si B es un anillo que tiene al anillo noetheriano A como subanillo y existen $b_1, \ldots, b_n \in B$ tales que B está generado como A–módulo por $b_1, \ldots, b_n$ (o sea, para todo $b \in S$ existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $b = \sum_{i=1}^n a_i b_i$), entonces B también es noetheriano;

   (c) todo endomorfismo sobreyectivo de un anillo noetheriano es un automorfismo.

5. Probar que los únicos conjuntos algebraicos irreducibles finitos son los unitarios. Probar que si k es infinito, entonces los conjuntos algebraicos afines lineales, esto es, definidos por polinomios de grado uno, son irreducibles.

6. Probar:

   (a) si f y g son polinomios de $k[x, y]$ que no tienen factores comunes, entonces $V(f, g)$ es un conjunto finito (sugerencia: considerar $f, g \in k(x)[y]$ y aplicar la identidad de Bezout);

   (b) si f es un polinomio irreducible en $k[x, y]$ y $V(f)$ es infinito, entonces $I(V(f)) = (f)$ y $V(f)$ es irreducible;

   (c) si k es infinito, entonces los conjuntos algebraicos irreducibles de $\mathbb{A}^2 k$ son, además del vacío y de $\mathbb{A}^2 k$, los conjuntos unitarios y las curvas $V(f)$ donde f es irreducible y $V(f)$ es infinito;

   (d) si k es algebraicamente cerrado y $f = f_1^{r_1} \cdots f_m^{r_m}$ es la descomposición en irreducibles de $f \in k[x, y]$, entonces $V(f) = V(f_1) \cup \cdots \cup V(f_m)$ es la descomposición de $V(f)$ en irreducibles y $I(V(f)) = (f_1 \cdots f_m)$.

7. Sea $V = \{(t, t^2, t^3); t \in k\}$, con k es algebraicamente cerrado. Probar que V es un conjunto algebraico afín. Calcular $I(V)$ y demostrar que V es irreducible.

8. Sean M y N A–módulos. Probar que el conjunto de homomorfismos $Hom_A(M, N)$ es un A–módulo con las operacioes dadas por $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$ y $(af)(m) = a\ f(m)$.

   Si $f : N \longrightarrow N'$ es un A–homomorfismo, entonces para todo A–módulo M las aplicaciones $f_* : Hom_A(M, N) \longrightarrow Hom_A(M, N')$; $g \longmapsto f \circ g$ y $f^* : Hom_A(N', M) \longrightarrow Hom_A(N, M)$; $g \longmapsto g \circ f$ son A–homomorfismos.

9. Sea A un subanillo de B y B un subanillo de C. Probar:

   (a) si B está finitamente generado como A–módulo y C está finitamente generado como B–módulo, entonces C está finitamente generado como A–módulo;

   (b) si B está finitamente generado como anillo sobre A y C está finitamente generado como anillo sobre C, entonces C está finitamente generado como anillo sobre A;

   (c) si A, B y C son cuerpos y $B = A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $C = B(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, entonces $C = A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$.

10. Probar:

    (a) si un elemento del cuerpo de fracciones $k(x)$ de $k[x]$ es entero sobre $k[x]$, entonces pertenece a $k[x]$, esto es, $k[x]$ es íntegramente cerrado;

    (b) no hay ningún elemento f de $k[x]$ tal que para todo $z \in k(x)$ exista $n > 0$ y $f^n z$ sea entero sobre $k[x]$.