Problemas de Geometría Algebraica

Hoja 2 – Espectro de un anillo

1. Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos. Probar que si J es un ideal primo, resp. radical de B, entonces $f^{-1}(J)$ es un ideal primo, resp. radical de A.

   Buscar un homomorfismo de anillos tal que la imagen inversa de un ideal maximal no sea un ideal maximal.

2. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal del anillo A, y $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ el epimorfismo de anillos $a \longmapsto \overline{a}$. Probar:

   (a) La aplicación que a cada ideal I de $A/\mathfrak{a}$ le asigna su imagen inversa $\pi^{-1}(I)$ es una biyección entre el conjunto de ideales de $A/\mathfrak{a}$ y el conjunto de ideales de A que contienen a $\mathfrak{a}$;

   (b) si I es un ideal de $A/\mathfrak{a}$, entonces $A/\pi^{-1}(I)$ es isomorfo a $(A/\mathfrak{a})/I$;

   (c) I es un ideal primo, resp. maximal, resp. radical de $A/\mathfrak{a}$ si, y sólo si $\pi^{-1}(I)$ es un ideal primo, resp. maximal, resp. radical de A.

3. Probar que en el espectro $\mathbf{Spec}A$ se verifican las siguientes propiedades:

   (a) si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de A, entonces $V(\mathfrak{m})$ es unitario;

   (b) si $I \subseteq J$ son ideales de A, entonces $D(I) \subseteq D(J)$;

   (c) si I es un ideal de A, entonces $D(I) = D(\mathrm{Rad}I)$;

   (d) si I, J son ideales de A, entonces $D(I) = D(J)$ si, y sólo si $\mathrm{Rad}I = \mathrm{Rad}J$;

   (e) si I es un ideal de A entonces $D(I) = \emptyset$ si, y sólo si $I \subseteq \mathrm{Rad}0$;

   (f) si I es un ideal de A, entonces $V(I) \neq \emptyset$ si, y sólo si I es propio (teorema de los ceros versión débil);

   (g) $\mathbf{Spec}A$ es compacto;

   (h) el nilradical Rad0 de A es un ideal primo si, y sólo si la intersección de cualquier par de abiertos no vacíos es no vacía, o equivalentemente, si $\mathbf{Spec}A$ es un espacio topológico irreducible.

4. Probar:

   (a) si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathbf{Spec}A$, entonces el punto $\mathfrak{q}$ pertenece a la clausura de $\{\mathfrak{p}\}$ si, y sólo si $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$;

   (b) la clausura del conjunto unitario $\{\mathfrak{p}\}$ del espectro de A es $V(\mathfrak{p})$;

   (c) el conjunto unitario $\{\mathfrak{p}\}$ de $\mathbf{Spec}A$ es cerrado si, y sólo si $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal. En este caso se dice que $\mathfrak{p}$ es un punto cerrado.

5. Para cada conjunto $X \subseteq \mathbf{Spec}A$ se denota por $I(X)$ al ideal $\bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}$. Probar:

   (a) si $X \subseteq Y \subseteq \mathbf{Spec}A$, entonces $I(Y) \subseteq I(X)$;

   (b) si X es un subconjunto de $\mathbf{Spec}A$, entonces $V(I(X))$ es la clausura de X;

   (c) si I es un ideal de A, entonces $I(V(I)) = \mathrm{Rad}I$ (teorema de los ceros).

6. Un elemento $e \in A$ se dice que es idempotente si $e^2 = e$. Probar:

   (a) $e \in A$ es idempotente si, y sólo si $1 - e$ es idempotente;

   (b) si e_1 y e_2 son no unidades de A tales que $1 = e_1 + e_2$ y $e_1 e_2 \in \mathrm{Rad}0$, entonces existe un elemento idempotente $e \neq 0, 1$ en A;

   (c) $\mathbf{Spec}A$ es un espacio topológico conexo si, y sólo si A no tiene elementos idempotentes distintos de 0 y 1.