Problemas de Geometría Algebraica

Hoja 3 – Variedades proyectivas

1. Demostrar que los conjuntos algebraicos proyectivos de $\mathbb{P}^n k$ verifican las siguientes propiedades:

   (a) $V(0) = \mathbb{P}^n k$;

   (b) si denotamos por R^+ al ideal generado por $\{x_0, \dots, x_n\}$, entonces $V(R^+) = \emptyset$;

   (c) si $p =< a_0, \dots, a_n >\in \mathbb{P}^n k$ y $a_i \neq 0$, entonces $V(\{x_j - a_i^{-1} a_j x_i\}_{0 \leq j \leq n,\ j \neq i}) = \{p\}$;

   (d) si $S \subseteq S' \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$, entonces $V(S') \subseteq V(S)$;

   (e) si $S \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ e I es el ideal (homogéneo) generado por el conjunto S_h de componentes homogéneas de polinomios de S entonces $V(S) = V(I) = V(\mathrm{Rad} I)$;

2. Si $X \subseteq \mathbb{P}^n k$, se denota por $I(X)$ al conjunto $\{f \in k[x_0, \dots, x_n];\ \forall p \in X, p \text{ es cero de } f\}$.

   (a) Probar que $I(X)$ es un ideal homogéneo radical de $k[x_0, \dots, x_n]$.

   (b) Si $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{P}^n k$, entonces $I(Y) \subseteq I(X)$.

   (c) Si $< a_0, \dots, a_n >\in \mathbb{P}^n k$ y $\exists i;\ a_i \neq 0$, entonces $I(< a_0, \dots, a_n >) = (\{x_j - a_i^{-1} a_j x_i\}_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}})$.

   (d) $I(\emptyset) = k[x_0, \dots, x_n]$, y si k es un cuerpo infinito, entonces $I(\mathbb{P}^n k) = 0$.

   (e) Si V es un conjunto algebraico proyectivo, entonces $V(I(V)) = V$.

   (f) Si I es un ideal homogéneo de $k[x_0, \dots, x_n]$, entonces $\mathrm{Rad} I$ también es un ideal homogéneo contenido en $I(V(I))$.

3. Probar que la intersección y la suma de ideales homogéneos y el producto de dos ideales homogéneos de $k[x_1, \dots, x_n]$ son ideales homogéneos. Probar que los conjuntos algebraicos proyectivos constituyen la familia de cerrados de una topología en $\mathbb{P}^n k$. Dicha topología se llama topología de Zariski de $\mathbb{P}^n k$. Probar que para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ la inclusión $\mathbb{A}^n k \cong U_i \longrightarrow \mathbb{P}^n k$ es una aplicación continua.

4. Sea $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Probar que $\{G_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$, donde G_p es el conjunto de los polinomios cuyos monomios son de la forma $\lambda x_0^{\beta_0} \cdots x_n^{\beta_n}$ con $\sum_{i=0}^n \alpha_i \beta_i = p$ es una graduación de $k[x_0, \dots, x_n]$.

   Probar que si $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ es homogéneo con esta graduación, entonces $\sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = df$, siendo d el grado de f.

   Probar que si *char* $k = 0$ y $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ es tal que $\sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = df$, entonces f es homogéneo.

5. Un cono en el espacio afín $\mathbb{A}^n k$ es un conjunto algebraico afín definido por una familia de polinomios homogéneos. Si V es un conjunto algebraico proyectivo, se llama cono afín de V, y se denota $C(V)$ al conjunto $\pi^{-1}(V) \cup \{(0, \dots, 0)\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1} k$, donde

$$\pi : k^{n+1} \backslash \{(0, \dots, 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^n k;\ (a_0, \dots, a_n) \longmapsto < a_0, \dots, a_n > .$$

   Probar:

   (a) Si $V = V(I)$, con I un ideal homogéneo propio de $k[x_0, \dots, x_n]$, entonces $C(V) = V(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1} k$ y por lo tanto es un cono, y si $I = k[x_0, \dots, x_n]$, entonces $C(V) = V(x_0, \dots, x_n) = \{(0, \dots, 0)\} \subseteq \mathbb{A}^n k$.

   (b) El ideal $I(V)$ coincide con $I(C(V))$ para todo conjunto algebraico proyectivo V.

   (c) La aplicación que a cada V algebraico proyectivo le asigna $C(V)$ es una biyección entre los conjuntos algebraicos proyectivos de $\mathbb{P}^n k$ y los conos de $\mathbb{A}^{n+1} k$.

6. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Un cuádrica de $\mathbb{P}^3 k$ es una hipersuperficie proyectiva $V = V(f)$ definida por un polinomio homogéneo $f \in k[x, y, z, t]$ de grado dos.

   (a) Si V es una cuádrica irreducible, ¿cuándo es posible encontrar un cambio de coordenadas proyectivas ψ tal que $\psi(V) = V(xt - yz)$?

   (b) Supongamos que V es la cuádrica $V = V(xt - yz)$. Probar que V contiene a dos familias de rectas (o variedades proyectivas lineales de dimensión uno) indexadas cada una de ellas por $\mathbb{P}^1 k$, y que por cada punto de V pasa exactamente una recta de cada familia.

   (c) Probar que si L_1, L_2 y L_3 son tres rectas disjuntas dos a dos de $\mathbb{P}^3 k$, entonces existe una única cuádrica que las contiene (sugerencia: Probar que por nueve puntos de $\mathbb{P}^3 k$ pasa siempre una cuádrica, y que si tres puntos alineados pertenecen a una cuádrica, entonces la recta que pasa por ellos está contenida en la cuádrica).