Problemas de Geometría Algebraica

Hoja 4 – Dimensión y dependencia entera

1. Probar:
   (a) Un anillo $A \neq \{0\}$ tiene dimensión de Krull cero si, y sólo si $\mathbf{Spec}A = \mathbf{Max}A$.
   (b) Un dominio de integridad A tiene dimensión de Krull cero si, y sólo si A es un cuerpo.
2. Si A es un anillo noetheriano de dimensión de Krull cero, probar que el espectro de A es finito y está formado por ideales primos que son al mismo tiempo minimales y maximales.
3. Si X es un espacio topológico Hausdorff no vacío, probar que $\dim X = 0$.
4. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Demostrar que un conjunto algebraico afín o proyectivo no vacío tiene dimensión cero si, y sólo si está formado por un número finito de puntos.
5. Sea A un anillo local de dimensión de Krull cero. Probar:
   (a) A está formado por unidades y elementos nilpotentes.
   (b) Los únicos elementos idempotentes de A son 0 y 1 (y por lo tanto, $\mathbf{Spec}A$ es un espacio topológico conexo).
6. Probar que la clausura íntegra $\overline{A}$ del subanillo A de B es íntegramente cerrada en B.
7. Sea $A \neq \{0\}$ un subanillo del dominio de integridad B de manera que B es entero sobre A. Probar que B es un cuerpo si, y sólo si A es un cuerpo.
8. Sea B un anillo entero sobre el subanillo $A \neq \{0\}$. Si B es un anillo local, resp. semilocal, entonces A es un anillo local, resp. semilocal. Si B es noetheriano y A es semilocal, entonces B es semilocal.
9. Sea B un dominio de integridad entero sobre el subanillo $A \neq \{0\}$, y sea K, resp. L, el cuerpo de fracciones de A, resp. B. Probar que L es entero (o equivalentemente, algebraico) sobre K.
10. Sea $k \hookrightarrow K$ una extensión de cuerpos. Se dice que el conjunto $S \subseteq K$ es de trascendencia sobre k si cualquier parte finita de S está formada por elementos algebraicamente independientes.

    Probar que si $S \subseteq K$ es un conjunto de trascendencia sobre k y $\alpha \in K$ entonces $S \cup \{\alpha\}$ es de trascendencia sobre k si, y sólo si α es trascendente sobre $k(S)$.
11. Sea $k \hookrightarrow K$ una extensión de cuerpos. Se dice que $S \subseteq K$ es una base de trascendencia sobre k si es un conjunto de trascendencia maximal.

    Probar que un conjunto $S \subseteq K$ de trascendencia sobre k es una base de trascendencia si, y sólo si K es algebraico sobre $k(S)$.
12. Sea $k \hookrightarrow K$ una extensión de cuerpos y $S \subseteq K$. Denotamos por $s(S)$ a la *expansión de S en K*, esto es, a la clausura íntegra de $k(S)$ en K. Probar
    (a) Si $S \subseteq S' \subseteq K$, entonces $s(S) \subseteq s(S')$;
    (b) si $\alpha \in s(S)$, entonces existe $F \subseteq S$, F finito tal que $\alpha \in s(F)$;
    (c) $S \subseteq s(S)$ para todo $S \subseteq K$;
    (d) $s(s(S)) = s(S)$ para todo $S \subseteq K$;
    (e) si $\beta \in s(S \cup \{\alpha\})$ y $\beta \notin s(S)$, entonces $\alpha \in s(S \cup \{\beta\})$.
13. Sea $k \hookrightarrow K$ una extensión de cuerpos. Probar que si $S \subseteq K$ es un conjunto de trascendencia sobre k y $S' \subseteq K$ es tal que $S \subseteq S'$ y K es algebraico sobre $k(S')$, entonces existe una base de trascendencia S'' tal que $S \subseteq S'' \subseteq S'$