Problemas de Geometría Algebraica

Hoja 3 – Bases de Groebner

1. Hallar $exp_{\leq} f$, $in_{\leq} f$ y ordenar los monomios de f en sentido decreciente cuando
   (a) $f = x^3y^2 + x^5 \in k[x, y]$ y "$\leq$" es el orden "$\leq_{lex}$" y también cuando es "$\leq_{glex}$" con $x \geq y$;
   (b) $f = x^3 + xy \in k[x, y]$ y "$\leq$" es "$\leq_{lex}$" con $x \geq y$ y también con $y \geq x$;
   (c) $f = 4xy^2z + 4z^2 - 5x^3 + 7x^2z^2 \in k[x, y, z]$ y "$\leq$" es alternativamente "$\leq_{lex}$", "$\leq_{glex}$" y "$\leq_{grevlex}$" con $z \geq y \geq x$.

2. *Los cocientes y el resto de la división dependen del orden de los polinomios.* Sea "$\leq$" el orden lexicográfico con $x \geq_{lex} y$ en $\mathbb{N}^2$, $f_1 = y^2 - 1$ y $f_2 = xy - 1$.
   (a) Dividir $f = x^2y + xy^2 + y^2$ entre f_1, f_2.
   (b) Dividir f entre f_2, f_1 (en ese orden).

3. *Los cocientes y el resto dependen del orden monomial.* Sean $f = x^7y^2 + x^3y^2 - y + 1, f_1 = xy^2 - x$ y $f_2 = x - y^3 \in k[x, y]$.
   (a) Dividir f entre f_1, f_2 usando el orden lexicográfico con $x \geq_{lex} y$.
   (b) Dividir f entre f_1, f_2 con el orden lexicográfico inverso con $x \geq_{grevlex} y$.

4. *El algoritmo de división (por sí solo) no resuelve el problema de pertenencia.* Sea $f_1 = xy + 1, f_2 = y^2 - 1 \in k[x, y]$ y $f = xy^2 - x$. Comprobar que $f \in (f_1, f_2)$ y que sin embargo el resto de la división de f entre f_1, f_2 con el orden lexicográfico ($x \geq_{lex} y$) es distinto de cero.

5. Dividir $f = xy^2z^2 + xy - yz \in k[x, y, z]$ entre $f_1 = x - y^2, f_2 = y - z^3, f_3 = z^2 - 1$
   (a) usando "$\leq_{lex}$" con $x \geq_{lex} y \geq_{lex} z$;
   (b) usando "$\leq_{glex}$" con $x \geq_{glex} y \geq_{glex} z$;
   (c) usando "$\leq_{grevlex}$" con $x \geq_{grevlex} y \geq_{grevlex} z$.

6. *La división de polinomios es lineal.* Sea "$\leq$" un orden monomial y $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Probar que si $q_1, \ldots, q_s, r$, resp. $q'_1, \ldots, q'_s, r'$, son los cocientes y el resto de la división de f resp. f' entre $f_1, \ldots, f_s$, entonces $\lambda q_1 + \mu q'_1, \lambda q_s + \mu q'_s, \lambda r + \mu r'$ son los cocientes y el resto de la división de $\lambda f + \mu f'$, donde $\lambda, \mu \in k$.

7. Probar que si $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal monomial, pongamos generado por los monomios $\mathbf{x}^{\alpha^1}, \ldots, \mathbf{x}^{\alpha^s}$, entonces $f \in I$ si, y sólo si el resto de la división (para un orden monomial cualquiera) de f por $\mathbf{x}^{\alpha^1}, \ldots, \mathbf{x}^{\alpha^s}$ es cero.

8. Consideremos en $\mathbb{N}^3$ el orden lexicográfico con $x \geq_{lex} y \geq_{lex} z$.
   (a) Probar que $\{x + z, y - z\}$ es una base de Groebner del ideal que generan.
   (b) Probar que los cocientes de la división de $f = xy$ por $f_1 = x + z, f_2 = y - z$ son distintos que los de la división de f por f_2, f_1.

9. Calcular una base de Groebner para el orden lexicográfico con $x \geq_{lex} y$ del ideal
$$I = (x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x).$$

10. Calcular una base de Groebner de los ideales $I = (x^2y - 1, xy^2 - x)$ y $J = (x - z^4, y - z^5)$ de $k[x, y]$
    (a) para el orden "$\leq_{lex}$" con $x \geq_{lex} y$;
    (b) para el orden "$\leq_{glex}$" con $x \leq_{glex} y$.

11. Determinar si el polinomio $f = xy^3 - z^2 + y^5 - z^3$ pertenece al ideal $I = (-x^3 + y, x^2y - z)$ de $k[x, y]$.