Variedades algebraicas

1.2. Teorema de la base de Hilbert

El teorema de la base de Hilbert es el resultado que nos permite garantizar que todo conjunto algebraico afín es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales.

(1.2.1) Proposición. *En un anillo conmutativo A las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1.2.1.1) *todo ideal I de A es finitamente generado;*

(1.2.1.2) *se verifica la* condición de cadena ascendente (CCA) *en el conjunto de ideales de A, o sea, si*

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$$

es una cadena ascendente de ideales de A, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $I_m = I_n$ para todo $n \geq m$;

(1.2.1.3) *se verifica la* condición maximal *en cualquier conjunto no vacío de ideales de A, esto es, si $\mathcal{I}$ es un conjunto no vacío de ideales de A, entonces $\mathcal{I}$ tiene un elemento maximal.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Si

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$$

es una cadena de ideales de A, entonces la unión $I = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$, que en este caso coincide con la suma $\sum_{i\in\mathbb{N}} I_i$, es un ideal de A. Por hipótesis, I está generado por un conjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Si $m_i \in \mathbb{N}$ es tal que $a_i \in I_{m_i}$ para $1 \leq i \leq n$ y $m = \max\{m_1, \ldots, m_n\}$, entonces $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq I_m$, con lo que $I_p = I_m$ para todo $p \geq m$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Un conjunto no vacío $mathcalI$ de ideales de A es inductivo por hipótesis. Aplicando el lema de Zorn, $\mathcal{I}$ tiene un elemento maximal.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea I un ideal de A y sea $\mathcal{I}$ el conjunto de ideales de A generados por subconjuntos finitos de I. Cada elemento de $\mathcal{I}$ es un ideal de A generado por un subconjunto finito de I, y por lo tanto está contenido en I. Por hipótesis, existe un elemento maximal J de $\mathcal{I}$.

Supongamos que $J \neq I$. Entonces existe $a \in I$ tal que $a \notin J$, y como J es finitamente generado, $J + aA$ también es generado por un subconjunto finito de I y contiene estrictamente a J — una contradicción con la maximalidad de J.

Luego $J = I$ y por lo tanto I está generado por un conjunto finito de elementos. □

(1.2.2) Definición. Si A verifica (alguna de) las condiciones equivalentes del resultado anterior, se dice que A es *noetheriano.*

(1.2.3) Ejemplo. El anillo $\mathbb{Z}$ es noetheriano porque es un dominio de ideales principales.

(1.2.4) Teorema. (de la base de Hilbert). *Si A es un anillo noetheriano, entonces el anillo de polinomios $A[x]$ también es noetheriano.*

Demostración. **(Sarges, 1976).** Supongamos que $A[x]$ no es noetheriano. Entonces existe un ideal I de $A[x]$ que no es finitamente generado. Sea

$$f_1 = a_1 x^{i_1} + b_1 x^{i_1 - 1} \cdots$$

un elemento de I del menor grado posible, y construyamos la sucesión de polinomios $f_1, f_2, f_3, \ldots$ eligiendo elementos $f_k = a_k x^{i_k} + \cdots$ del menor grado posible en $I \backslash (f_1, \ldots, f_{k-1})$ para $k \geq 2$.

Entonces los grados estan en sucesión creciente $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots$. Consideremos la sucesión

$$(a_1) \subseteq (a_1, a_2) \subseteq (a_1, a_2, a_3) \subseteq \cdots$$

de ideales de A. Como A es noetheriano, existe un entero positivo k tal que $(a_1, \ldots, a_k) = (a_1, \ldots, a_m)$ para todo $m \geq k$. Por tanto, como $a_{k+1} \in (a_1, \ldots, a_k)$, existen $b_1, \ldots, b_n \in A$ tales que $a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} b_i a_i$, y el polinomio

$$g = f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} b_i x^{n_{k+1} - n_i} f_i \in I$$

es un polinomio que no pertenece a $(f_1, \ldots, f_k)$ y cuyo grado es estrictamente menor que n_{k+1} — una contradicción con la elección de f_{k+1}.

Luego $A[x]$ es un anillo noetheriano. □

(1.2.5) Corolario. *Si A es un anillo noetheriano, entonces $A[x_1, \ldots, x_n]$ es un anillo noetheriano para todo entero positivo n.*

Demostración. Por indución sobre n.
Si $n = 1$, obtenemos el enunciado del teorema.
Si $A[x_1, \ldots, x_n]$ es noetheriano, entonces

$$A[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = A[x_1, \ldots, x_n][x_n + 1]$$

también lo es por el teorema. □

(1.2.6) Corolario. *Si V es un conjunto algebraico afín, entonces*

$$V = V(f_1, \ldots, f_m)$$

para alguna familia de polinomios $f_1, \ldots, f_m$.

Demostración. Si $V = V(S)$, entonces $V = V(I)$, donde I es el ideal generado por S. Como $k[x_1, \ldots, x_n]$ es noetheriano, existen $f_1, \ldots, f_m \in I$ que generan a I, y por lo tanto $V = V(f_1, \ldots, f_m)$. □

(1.2.7) Corolario. *Si $V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \cdots$ es una sucesión decreciente de conjuntos algebraicos afines, entonces existe m tal que $V_k = V_m$ para todo $k \geq m$.*

Demostración. Como la sucesión de ideales

$$I(V_1) \subseteq I(V_2) \subseteq I(V_3) \subseteq \cdots$$

es creciente, en virtud del teorema existe m tal que $I(V_k) = I(V_m)$ para todo $k \geq m$. Luego

$$V_k = V(I(V_k)) = V(I(V_m)) = V_m$$

para todo $k \geq m$. □

(1.2.8) Definición. Un conjunto algebraico afín V se dice que es *irreducible* si, siempre que $V = V_1 \cup V_2$, con V_1 y V_2 conjuntos algebraicos afines, entonces o bien $V_1 = V$, o bien $V_2 = V$.

(1.2.9) Proposición. *Sea V un conjunto algebraico afín. Entonces V es irreducible si, y sólo si $I(V)$ es un ideal primo.*

Demostración. Si V es irreducible y J y K son ideales de $k[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $JK \subseteq I(V)$, entonces

$$V = V(I(V)) \subseteq V(JK) = V(J) \cup V(K).$$

Si $V' = V \cap V(J)$ y $V'' = V \cap V(K)$, entonces $V = V' \cup V''$, y por hipótesis, o bien $V = V'$, o bien $V = V''$, es decir, o bien $V \subseteq V(J)$, o bien $V \subseteq V(K)$. Luego o bien

$$I = I(V) \supseteq I(V(J)) = J,$$

o bien

$$I = I(V) \supseteq I(V(K)) = K,$$

de donde se concluye que $I(V)$ es un ideal primo.

Recíprocamente, si $I(V)$ es primo y V' y V'' son conjuntos algebraicos afines tales que $V = V' \cup V''$, entonces

$$I(V) = I(V' \cup V'') = I(V')I(V'').$$

Luego o bien $I(V') \subseteq I(V)$, o bien $I(V'') \subseteq I(V)$, de donde se concluye que o bien

$$V = V(I(V)) \subseteq V(I(V')) = V',$$

o bien

$$V = V(I(V)) \subseteq V(I(V'')) = V''.$$

□

(1.2.10) Teorema. *Sea V un conjunto algebraico afín. Entonces existen unos únicos conjuntos algebraicos irreducibles $V_1, \ldots, V_n$ tales que*

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$$

y $V_i \not\subseteq V_j$ para todo $i \neq j$.

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ el conjunto formado por todos los conjuntos algebraicos V que no se pueden descomponer como unión finita de conjuntos algebraicos irreducibles.

Supongamos que $\mathcal{V}$ es no vacío. Por (1.2.7) y el lema de Zorn, $\mathcal{V}$ tiene un elemento minimal V. Luego V no es irreducible, y por lo tanto existen V_1 y V_2 conjuntos algebraicos afines estrictamente contenidos en V tales que $V = V_1 \cup V_2$. Por la minimalidad de V, ni V_1 ni V_2 pertenecen a $\mathcal{V}$, y por lo tanto existen conjuntos algebraicos irreducibles

$$V_{11}, \ldots, V_{1n}, V_{21}, \ldots, V_{2m}$$

tales que

$$V_1 = \bigcup_{i=1}^{n} V_{1i}, \; V_2 = \bigcup_{i=1}^{m} V_{2i}.$$

Luego
$$V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{1i} \cup \bigcup_{i=1}^{m} V_{2i},$$
que contradice que $V \in \mathcal{V}$, así que $\mathcal{V} = \emptyset$ y todo conjunto algebraico afín es la unión de conjuntos algebraicos irreducibles $V_1, \ldots, V_n$, que se pueden elegir de tal forma que $V_i \not\subseteq V_j$ para $i \neq j$.

Sean $V_1', \ldots, V_m'$ otros conjuntos algebraicos irreducibles tales que $V_i' \not\subseteq V_j'$ para $i \neq j$ y $V = V_1' \cup \cdots \cup V_m'$. Entonces
$$V_i = V_i \cap \bigcup_{j=1}^{m} V_j' = \bigcup_{j=1}^{m} V_i \cap V_j',$$
de donde $V_i = V_i \cap V_j'$ para algún $j \in \{1, \ldots, m\}$ por ser V_i irreducible, esto es, $V_i \subseteq V_j'$. Simétricamente, $V_j' \subseteq V_k$ para algún $k \in \{1, \ldots, n\}$. Como $V_i \not\subseteq V_k$ cuando $i \neq k$, tenemos $V_i = V_j' = V_k$. Luego $V_i \in \{V_1', \ldots, V_m'\}$ para cada i, y simétricamente $V_j' \in \{V_1, \ldots, V_n\}$ para cada j, lo que prueba la unicidad. □

(1.2.11) Definición. Si V es un conjunto algebraico afín, a los conjuntos algebraicos irreducibles $V_1, \ldots, V_n$ tales $V_i \not\subseteq V_j$ para $i \neq j$ y $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ se les denomina *componentes irreducibles de* V.