Variedades algebraicas

1.4. Variedades afines

Una *variedad afín* es un conjunto algebraico afín irreducible, o equivalentemente, un conjunto algebraico afín V tal que $I(V)$ es un ideal primo.

(1.4.1) Definición. Se llama *anillo de coordenadas de la variedad afín* V, y se denota por $k[V]$ al anillo cociente $k[x_1, \ldots, x_n]/I(V)$.

(1.4.2) El anillo de coordenadas de una variedad afín V es un dominio de integridad, pues $I(V)$ es un ideal primo.
Además, $k[V]$ es isomorfo al *anillo de las funciones polinomiales de* V, o sea, al anillo formado por las aplicaciones $F : V \longrightarrow k$ tales que existe $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ y $F(p) = f(a_1, \ldots, a_n)$ para cada $p = (a_1, \ldots, a_n) \in V$ con la suma y el producto dados por

$$F + G(p) = F(p) + G(p) \quad , \quad F \cdot G(p) = F(p) \cdot G(p).$$

En efecto, la aplicación de $k[V]$ en el anillo de funciones polinomiales de V que a $\overline{f}$ le asigna

$$F : V \longrightarrow k;\ p \longmapsto f(p)$$

está bien definida porque si $f - g \in I(V)$, entonces $f(p) = g(p)$ para todo $p \in V$.
Es fácil comprobar que dicha aplicación es un homomorfismo de anillos, y que es sobreyectiva porque cada $F : V \longrightarrow k$ polinomial, esto es, tal que existe $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ y $F(p) = f(p)$ para todo $p \in V$, es la imagen de $\overline{f}$.
Además, es inyectiva, porque si la imagen de $\overline{f}$ es la aplicación nula, entonces $f(p) = 0$ para todo $p \in V$, de donde $f \in I(V)$, esto es, $\overline{f} = 0$.
Las funciones polinomiales correspondientes a los elementos $\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_n}$ de $k[V]$ se llaman *funciones coordenadas.*

(1.4.3) Sea I un ideal de $k[V]$. El conjunto

$$V_V(I) = \{p \in V;\ f(p) = 0, \forall f \in I\}$$

es un conjunto algebraico afín contenido en V.

Por otra parte, si W es un conjunto algebraico afín contenido en V, entonces

$$I_V(W) = \{F \in k[V];\ F(p) = 0, \forall p \in W\}$$

es el ideal $I(W)/I(V)$ de $k[V]$.

Si W es además una variedad afín, entonces $k[W] = k[V]/I_V(W)$ y la aplicación

$$k[V] \longrightarrow k[W];\ \overline{f} \longmapsto \overline{f}$$

es un epimorfismo de anillos.

Si U es otra variedad afín contenida en V e I es el ideal imagen de $I_V(U)$ por el epimorfismo $k[V] \longrightarrow k[W]$, entonces $V_W(I) = U \cap W$.

(1.4.4) Proposición. *Si k es algebraicamente cerrado, V es una variedad afín e I es un ideal propio de $k[V]$, entonces $V_V(I) \neq \emptyset$.*

Demostración. Si $I = J/I(V) \neq k[V]$, entonces $J \neq k[x_1, \ldots, x_n]$, y por tanto $V_V(I) = V(J) \neq \emptyset$. □

(1.4.5) Lema. *Sea $f : A \longrightarrow B$ un epimorfismo de anillos. Si I es un ideal de B, entonces*

$$\mathrm{Rad}I = f(\mathrm{Rad}f^{-1}(I)).$$

Por lo tanto, I es radical si, y sólo si $f^{-1}(I)$ es radical.

Demostración. Sea $a \in \mathrm{Rad}f^{-1}(I)$. Entonces existe $n > 0$ tal que $a^n \in f^{-1}(I)$, de donde $f(a)^n \in I$, esto es, $f(a) \in \mathrm{Rad}I$.

Recíprocamente, si $b \in \mathrm{Rad}I$, entonces por un lado $b^n \in I$ para algún $n > 0$ y por otra parte $b = f(a)$ para algún $a \in A$. Luego $f(a^n) \in I$, lo que implica que $a^n \in f^{-1}(I)$, o lo que es lo mismo, $a \in \mathrm{Rad}f^{-1}(I)$.

Finalmente, si $f^{-1}(I)$ es radical, entonces

$$f^{-1}(I) = \mathrm{Rad}f^{-1}(I),$$

y por tanto

$$I = f(f^{-1}(I)) = f(\mathrm{Rad}f^{-1}(I)) = \mathrm{Rad}I.$$

Recíprocamente, si I es radical y $a \in \mathrm{Rad}f^{-1}(I)$, entonces existe $n > 0$ tal que

$$f(a)^n = f(a^n) \in I.$$

Por tanto $f(a) \in I$, o sea, $a \in f^{-1}(I)$, con lo que $f^{-1}(I)$ es radical. □

(1.4.6) Proposición. *Sea k algebraicamente cerrado y V una variedad afín. Si I es un ideal de $k[V]$ entonces*

$$I_V(V_V(I)) = \mathrm{Rad} I.$$

La aplicación que a cada subconjunto algebraico afín W de V le asigna el ideal $I_V(W)$ es una biyección entre los conjuntos algebraicos afines de V y los ideales radicales de $k[V]$.

Demostración. El teorema de los ceros garantiza que para cada ideal J de $k[x_1, \ldots, x_n]$,

$$I(V(J)) = \mathrm{Rad} J.$$

Para cada ideal $I = J/I(V)$ de $k[V]$,

$$I_V(V_V(I)) = I(V(J))/I(V) = \mathrm{Rad} J/I(V) = \mathrm{Rad} I,$$

puesto que, en virtud del lema anterior,

$$\mathrm{Rad}(J/I(V)) = \mathrm{Rad} J/I(V),$$

dado que $\pi : k[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow k[V]$ es un epimorfismo.
Por otra parte, si W es un conjunto algebraico afín ontenido en W, entonces

$$I_V(W) = I(W)/I(V),$$

y el conjunto algebraico que define este ideal es

$$V_V(I_V(W)) = V(I(W)) = W,$$

luego I_V es una aplicación biyectiva entre los conjuntos algebraicos afines contenidos en V y los ideales radicales de $k[V]$, y su inversa es V_V. $\square$

(1.4.7) Definición. Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m k$ variedades afines. Una *aplicación polinomial* de V en W es una aplicación $\varphi : V \longrightarrow W$ tal que existen $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ y

$$\varphi(p) = (f_1(p), \ldots, f_m(p))$$

para todo $p \in V$.

(1.4.8) El conjunto de las aplicaciones polinomiales de V en W se corresponde biyectivamente con el conjunto de homomorfismos de anillos de $k[W]$ en $k[V]$.

En efecto, si $\psi : k[W] \longrightarrow k[V]$ es un homomorfismo de anillos, consideremos la aplicación

$$\varphi : V \longrightarrow W \; ; \quad p \longmapsto (\psi(\overline{x_1})(p), \ldots, \psi(\overline{x_m})(p)),$$

donde $\overline{x_i}$ es la función polinomial coordenada i–ésima de V, con lo que $\psi(\overline{x_i})$ es una función polinomial en W.

Recíprocamente, si $\varphi : V \longrightarrow W$ es una aplicación polinomial entonces existen $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $\varphi(p) = (f_1(p), \ldots, f_m(p))$ para todo $p \in V$. Sea

$$\psi : k[W] \longrightarrow k[V]$$

el homomorfismo de anillos que a cada función coordenada $\overline{x_i} \in k[W]$ le asigna $\overline{f_i} \in k[V]$.

Una aplicación polinomial $\varphi : V \longrightarrow W$ se dice que es un *isomorfismo* si existe otra aplicación polinomial $\psi : W \longrightarrow V$ tal que $\varphi \circ \psi = 1_W$ y $\psi \circ \varphi = 1_V$.

(1.4.9) Definición. Un *cambio de coordenadas afines* de $\mathbb{A}^n k$ es una aplicación polinomial biyectiva $\varphi : \mathbb{A}^n k \longrightarrow \mathbb{A}^n k$ de manera que existen $f_1, \ldots, f_n$ de grado 1 tales que $\varphi(p) = (f_1(p), \ldots, f_n(p))$ para todo $p \in \mathbb{A}^n k$.

(1.4.10) Definición. El cuerpo de fracciones del anillo de coordenadas de una variedad afín V se denomina *cuerpo de funciones racionales de* V, y se denota $k(V)$. Alos elementos de $k(V)$ se les denomina *funciones racionales en* V .

(1.4.11) Definición. Un anillo A se dice que es *local* si tiene un único ideal maximal $\mathfrak{m}$. En ese caso, al cuerpo $A/\mathfrak{m}$ se le denomina *cuerpo residual de* A.

Se dice que A es *semilocal* si tiene un número finito de ideales maximales.

(1.4.12) Sea A un anillo. Si el conjunto

$$N = \{a \in A; \; a \text{ no es una unidad } \}$$

es un ideal de A entonces A es un anillo local y en ese caso, N es el único ideal maximal de A.

En efecto, el ideal N es maximal, porque si I es un ideal de A que contiene estrictamente a N, entonces existe un elemento $a \in I$ que no está en N, y que por tanto es una unidad de A. Luego $I = A$.

Por otra parte, si I es un ideal de A distinto de A, entonces $I \subseteq N$, porque I no contiene ninguna unidad. Luego N es el único ideal maximal.

Recíprocamente, si A es local y $\mathfrak{m}$ es su único ideal maximal, entonces todo par de elementos a, b de A que no sean unidades generan ideales (a) y (b) distintos de A. Luego tanto (a) como (b) están contenidos en $\mathfrak{m}$, que a su vez está contenido en N. Luego $a+b \in N$, y dado que $0 \in N$ y $ac \in N$ para todo $c \in A$, tenemos que N es un ideal.

(1.4.13) Sea V una variedad afín. Los elementos de $k(V)$ son de la forma a/b, donde $a, b \in k[V]$ y $b \neq 0$.
Si $p \in V$, se dice que $z \in k(V)$ *está definido en* p si existen $a, b \in k[V]$ tales que

$$z = a/b \text{ y } b(p) \neq 0.$$

Si $z \in k(V)$ está definido en p, definimos

$$z(p) := a(p)/b(p),$$

donde $z = a/b$ con $b(p) \neq 0$.
Si $z = a'/b'$ con $b'(p) \neq 0$, entonces $ab' = a'b$, y por lo tanto

$$a(p)b'(p) = a'(p)b(p).$$

Multiplicando por los inversos de $b(p)$ y $b'(p)$, tenemos

$$a(p)/b(p) = a'(p)/b'(p),$$

luego $z(p)$ no depende de la representación que elijamos de z como fracción.

(1.4.14) El conjunto de funciones racionales definidas en p, que se denota por $\mathcal{O}_p(V)$ es un anillo local contenido en $k(V)$ que contiene a $k[V]$, y su ideal maximal, esto es, el ideal formado por las no unidades, es

$$M_p(V) = \{z \in \mathcal{O}_p(V);\ z(p) = 0\}.$$

En efecto, el conjunto $\mathcal{O}_p(V)$ de las funciones racionales definidas en p es un subanillo de $k(V)$, porque 1 está definida en p, y si z y z' están definidas en p, entonces existen $a, a', b, b' \in k[V]$ tales que

$$z = a/b\ , \quad z' = a'/b' \quad \text{y} \quad b(p) \neq 0 \neq b'(p).$$

Luego

$$z + z' = (ab' + a'b)/bb' \quad \text{y} \quad zz' = aa'/bb'$$

están definidas en p.
Además, el conjunto de no unidades de $\mathcal{O}_p(V)$, esto es, el conjunto no vacío

$$\{z \in k(V)/z(p) = 0\}$$

es un ideal de $\mathcal{O}_p(V)$, pues si z y z' son no unidades y $z'' \in \mathcal{O}_p(V)$, entonces

$$(z+z')(p) = z(p) + z'(p) = 0 \quad \text{y} \quad (z''\, z)(p) = z''(p)z(p) = 0,$$

esto es tanto $z+z'$ como $z''z$ son no unidades.
Luego $\mathcal{O}_p(V)$ es un anillo local y

$$M_p(V) = \{z \in \mathcal{O}_p(V);\ z(p) = 0\}$$

es su ideal maximal.

(1.4.15) Si k es algebraicamente cerrado y V es una variedad afín, entonces

$$k[V] = \bigcap_{p \in V} \mathcal{O}_p(V).$$

En efecto, si $z \in \bigcap_{p\in V} \mathcal{O}_p(V)$, entonces el conjunto

$$I = \{b \in k[V];\ bz \in k[V]\}$$

es un ideal de $k[V]$, pues si $b, b' \in I$, entonces

$$(b+b')z = bz + b'z \in k[V].$$

Además, $V_V(I) = \emptyset$.
Por (1.4.4), $I = k[V]$, y por tanto $z = 1 \cdot z \in k[V]$.

(1.4.16) Sea V una variedad afín y $z \in k(V)$. El conjunto de puntos $p \in V$ en los que z no está definida es un subconjunto algebraico de V que se denomina *conjunto de polos de z*.
En efecto, si J es el ideal de $k[V]$

$$J = \{b \in k[V];\ bz \in k[V]\},$$

entonces $I_V(J)$ es un subconjunto algebraico afín de V formado por los puntos en los que se anulan todos los posibles denominadores de z, y por tanto es el conjunto de puntos en los que z no está definida.