Variedades algebraicas

1.5. Topología de Zariski y espectro de un anillo

(1.5.1) Dado que

(1.5.1.1) la unión de los conjuntos algebraicos afines $V(I)$ y $V(J)$ es el conjunto algebraico afín $V(IJ)$,

(1.5.1.2) la intersección de una familia $\{V(I_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es el conjunto algebraico afín $V(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha)$ y

(1.5.1.3) tanto $\emptyset = V(k[x_1, \dots, x_n])$ como $\mathbb{A}^n k = V(0)$ son conjuntos algebraicos afines,

los conjuntos algebraicos afines contituyen la familia de cerrados de una topología en $\mathbb{A}^n k$.

(1.5.2) Definición. A la topología en $\mathbb{A}^n k$ cuya familia de cerrados son los conjuntos algebraicos afines se le denomina *topología de Zariski* de $\mathbb{A}^n k$.

(1.5.3) Si V es una variedad de V, la topología inducida en V por la de Zariski coincide con la topología cuya familia de cerrados son los conjuntos algebraicos afines contenidos en V. A dicha topología se le llama *topología de Zariski de V.*

La topología de Zariski de $\mathbb{A}^n k$ no coincide con la topología usual cuando $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$.

Por ejemplo, las bolas cerradas de $\mathbb{A}^2 \mathbb{R}$ con la topología usual no son cerrados con la topología de Zariski, pues no se pueden descomponer como unión finita de irreducibles de $\mathbb{A}^2 \mathbb{R}$, que son además del vacío y el propio $\mathbb{A}^2 \mathbb{R}$ los conjuntos unitarios y las curvas irreducibles $V(f)$ (ver (1.8.6)).

Otra diferencia viene dada por el hecho siguiente:

(1.5.4) Proposición. *Sea V una variedad afín. El conjunto*

$$\{D(\overline{f}) = V \backslash V_V(\overline{f});\ \overline{f} \in k[V]\}$$

es una base de la topología de Zariski de V. De hecho, todo abierto es unión finita de abiertos de esa forma, y por lo tanto V es compacto.
Si k es infinito, cualesquiera par de abiertos no vacíos de dicha topología se intersectan, así que V no es Hausdorff.

Demostración. En efecto, U es abierto si y sólo si $V \backslash U$ es un conjunto algebraico afín contenido en V, que en virtud de (1.2.6) es de la forma

$$V(f_1, \ldots, f_m) = V_V(\overline{f_1}) \cap \cdots \cap V_V(\overline{f_m}).$$

Luego

$$U = D(\overline{f_1}) \cup \cdots \cup D(\overline{f_m}).$$

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de V. Para cada $i \in I$, existen $\overline{f_1}, \cdots, \overline{f_{m_i}} \in k[V]$ tales que

$$U_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} V(\overline{f_{i_j}}).$$

Consideremos la familia de ideales de $k[V]$ generados por partes finitas del conjunto

$$\{\overline{f_{i_j}}\}_{\substack{i\in I \\ 1\leq j\leq m_i}}.$$

Como $k[V]$ es noetheriano, esta familia de ideales tiene un elemento maximal

$$J = (\overline{f_1}, \cdots, \overline{f_m}),$$

donde $V(\overline{f_j})$ interviene en la descomposición de U_{i_j} para $j \in \{1, \ldots, m\}$. El ideal J coincide con el ideal generado por $\{\overline{f_{i_j}}\}_{\substack{i\in I \\ 1\leq j\leq m_i}}$ (por la maximalidad de J), así que

$$V = \bigcup_{i\in I} U_i = V(\{\overline{f_{i_j}}\}_{i\in I, 1\leq j\leq m_i}) = V(J) = \bigcup_{j=1}^{m} D(\overline{f_j}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_{i_j} \subseteq V.$$

Luego $\{U_{i_j}\}_{1\leq j\leq m}$ recubre V.
Si $D(\overline{f}) \neq \emptyset \neq D(\overline{g})$, entonces

$$D(\overline{f}) \cap D(\overline{g}) = D(\overline{fg}),$$

y $\overline{fg} \neq 0$ dado que $\overline{f} \neq 0 \neq \overline{g}$ y $k[V]$ es un dominio de integridad.
Luego $D(\overline{f}) \cap D(\overline{g}) \neq \emptyset$. □

(1.5.5) La situación anterior se puede generalizar a anillos que no sean el anillo de coordenadas de una variedad afín.
Consideremos en el conjunto de ideales primos de un anillo A la familia de subconjuntos de la forma

$$V(I) = \{\mathfrak{p};\ \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo}, I \subseteq \mathfrak{p}\},$$

donde I es un ideal de A. Tenemos que $V(0)$ es el conjunto de todos los ideales primos de A y $V(A)$ es el vacío. Además,

$$V(I) \cup V(J) = V(IJ) \quad \text{y} \quad \bigcap_{\alpha \in A} V(I_\alpha) = V(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha).$$

Por lo tanto dicha familia de subconjuntos es la familia de cerrados de una topología del conjunto de ideales primos de A.

(1.5.6) Definición. Sea A un anillo. Se llama *espectro de* A, y se denota $\mathbf{Spec}A$ al espacio topológico formado por el conjunto de ideales primos de A con la topología cuyos cerrados son los conjuntos $V(I)$, donde I es un ideal de A. A esta topología se le denomina *topología de Zariski de* $\mathbf{Spec}A$.

(1.5.7) Al abierto $\mathbf{Spec}A \backslash V(I)$ se le denota por $D(I)$, y si I es el ideal principal $I = (f)$, por $D(f)$.
La familia $\{D(f)\}_{f \in A}$ es una base de la topología de Zariski de $\mathbf{Spec}A$, pues $D(I) = \bigcup_{f \in I} D(f)$ para cada I.
El espacio $\mathbf{Spec}A$ es compacto. En efecto, si $\{D(I_j)\}_{j \in J}$ es un recubrimiento por abiertos de $\mathbf{Spec}A$, entonces

$$\bigcup_{j \in J} D(I_j) = D(A).$$

Si $\sum_{j \in J} I_j \neq A$, entonces existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ que no pertenece a

$$\bigcup_{j \in J} D(I_j) = V(\sum_{j \in J} I_j)$$

porque contiene a $\sum_{j \in J} I_j$.
Luego $1 \in \sum_{j \in J} I_j$ y por lo tanto existen $j_1, \ldots, j_n \in J$ y $a_i \in I_{j_i}$ para cada i tales que $1 = a_1 + \cdots + a_n$. Luego $1 \in \sum_{i=1}^n I_{j_i}$, así que $\sum_{i=1}^n I_{j_i} = A$ y

$$\bigcup_{i=1}^n D(I_{j_i}) = D(\sum_{i=1}^n I_{j_i}) = D(A) = \mathbf{Spec}A.$$

(1.5.8) Sea A un anillo. Denotemos, para cada conjunto $X \subseteq \mathbf{Spec}A$, por $I(X)$ al ideal intersección de todos los ideales primos pertenecientes a X.
Si $X \subseteq Y$, entonces

$$I(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p} = I(X).$$

(1.5.9) Proposición. *Si X es un conjunto de ideales primos de A, entonces $V(I(X))$ es la clausura de X en la topología de Zariski del espectro de A.*

Demostración. Dado que $I(X)$ es la intersección de ideales primos de X, todos los elementos de X contienen a $I(X)$, y por lo tanto

$$X \subseteq V(I(X)).$$

Por otra parte, $V(I(X))$ es cerrado y si $V(I)$ es otro cerrado que contiene a X, entonces $I \subseteq \mathfrak{p}$ para cada $\mathfrak{p} \in X$. Luego

$$I \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p} = I(X),$$

y de ahí $V(I(X)) \subseteq V(I)$. $\square$

(1.5.10) Definición. Un subconjunto S de un anillo A es una *parte multiplicativamente cerrada* si $1 \in S$ y $ss' \in S$ para todo $s, s' \in S$.

(1.5.11) Lema. *Sea I un ideal y S una parte multiplicativamente cerrada de A tales que $I \cap S = \emptyset$. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{M} = \{J;\ J \text{ ideal de } A, I \subseteq J, J \cap S = \emptyset\}$$

tiene un elemento maximal. Además, dicho elemento maximal es un ideal primo.

Demostración. $I \in \mathcal{M}$, luego $\mathcal{M}$ es no vacío. Si $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{M}$, entonces

$$J = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$$

es un ideal de A tal que $J \cap S = \emptyset$ e $I \subseteq J$.
Por el lema de Zorn, existe un elemento maximal J de $\mathcal{M}$.
Si $a, b \in A$ y $a, b \notin J$, entonces J está estrictamente contenido en $J + (a)$ y en $J + (b)$.

Por la maximalidad de J, tanto $J + (a)$ como $J + (b)$ intersectan a S, luego existen $c, c' \in A$ y $d, d' \in J$ tales que

$$ac + d, bc' + d' \in S.$$

Como S es multiplicativamente cerrada,

$$S \ni (ac + d)(bc' + d') = abcc' + acd' + bc'd + dd'.$$

Si $ab \in J$, entonces $(ac + d)(bc' + d') \in J$ — una contradicción con que $J \cap S = \emptyset$.
Luego $ab \notin J$, y por tanto J es primo. □

(1.5.12) Corolario. *Si I es un ideal propio de A, entonces existe un ideal maximal de A que contiene a I.*

Demostración. Sea S la parte multiplicativamente cerrada $\{1\}$. Entonces $I \cap S = \emptyset$, y por el lema existe un elemento maximal J de $\mathcal{M}$ que además es un ideal primo. Ese ideal J contiene a I y es maximal entre los que no contienen a 1, esto es, entre los ideales propios de A. □

(1.5.13) Corolario. *Si I es un ideal propio de A, entonces*

$$\mathrm{Rad} I = \bigcap \{\mathfrak{p};\ \mathfrak{p} \text{ es ideal primo }, I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Demostración. Si $a \in \mathrm{Rad} I$, entonces existe $n > 0$ tal que $a^n \in I$, y $a \in \mathfrak{p}$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ que contenga a I. Luego $a \in \bigcap\{\mathfrak{p};\ I \subseteq \mathfrak{p}\}$.
Recíprocamente, si

$$a \in \bigcap \{\mathfrak{p};\ I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

e I no intersecta a $S = \{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, por el lema existe un elemento maximal J de $\mathcal{M}$ que además es un ideal primo — una contradicción, pues por ser un elemento de $\mathcal{M}$, J contiene a I y su intersección con S es vacío, así que $a \notin J$.
Luego $S \cap I \neq \emptyset$, y como I es propio, existe $n > 0$ tal que $a^n \in I$. □

(1.5.14) Definición. Un espacio topológico X es *irreducible* si siempre que $X = V_1 \cup V_2$, con V_1 y V_2 cerrados, entonces o bien $X = V_1$, o bien $X = V_2$. Un subconjunto Y de X es irreducible cuando es irreducible como espacio topológico con la topología inducida, esto es, cuando siempre que $Y \subseteq V_1 \cup V_2$, con V_1 y V_2 cerrados de X entonces o bien $Y \subseteq V_1$ o bien $Y \subseteq V_2$.

(1.5.15) Proposición. *Sea X un subconjunto del espectro de A. Entonces X es irreducible si y sólo si $I(X)$ es un ideal primo.*

Demostración. Supongamos que $ab \in I(X)$. Entonces

$$X \subseteq V(I(X)) \subseteq V(ab) = V(a) \cup V(b),$$

y por ser X irreducible, o bien $X \subseteq V(a)$, o bien $X \subseteq V(b)$. Luego o bien

$$a \in I(V(a)) \subseteq I(X),$$

o bien

$$b \in I(V(b)) \subseteq I(X).$$

Recíprocamente, si $I(X)$ es primo y $V_1 = V(I_1)$ y $V_2 = V(I_2)$ son cerrados tales que $X \subseteq V_1 \cup V_2$, entonces

$$I(V_1)I(V_2) = I(V_1 \cup V_2) \subseteq I(X),$$

luego o bien $I(V_1) \subseteq I(X)$, o bien $I(V_2) \subseteq I(X)$. Por el resultado anterior tenemos que o bien $\mathrm{Rad}I_1$ o bien $\mathrm{Rad}I_2$ están contenidos en $I(X)$. Luego o bien

$$X \subseteq V(I(X)) \subseteq V(\mathrm{Rad}I_1) = V(I_1),$$

o bien

$$X \subseteq V(I(X)) \subseteq V(\mathrm{Rad}I_2) = V(I_2).$$

□

(1.5.16) Sea k algebraicamente cerrado y V una variedad afín. Si $p \in V$, entonces

$$I_V(p) = \{\overline{f} \in k[V];\ f(p) = 0\} = I(p)/I(V)$$

es un ideal primo de $k[V]$ (de hecho es la imagen inversa por la inclusión $i : k[V] \longrightarrow \mathcal{O}_pV$ del ideal maximal de $\mathcal{O}_pV$).
Consideremos la aplicación

$$\varphi : V \longrightarrow \mathbf{Spec}k[V];\ p \longmapsto I_p(V).$$

Dado que

$$\varphi^{-1}(D(I)) = \{p \in V;\ I \not\subseteq I_p(V)\} = \{p \in V;\ \exists \overline{f} \in I, f(p) \neq 0\} = V \backslash V(I)$$

para cada ideal I de $k[V]$, la aplicación φ es continua.
En general φ no es sobre, pero si es inyectiva, puesto que en virtud del teorema de los ceros

$$\varphi : V \longrightarrow \mathbf{Max}k[V]$$

es biyectiva.

(1.5.17) Definición. Un *punto genérico del cerrado* V del espacio topológico X es un punto $p \in V$ tal que $\overline{\{p\}} = V$.

(1.5.18) Si el cerrado V tiene un punto genérico p, entonces V es irreducible, porque si V_1 y V_2 son cerrados tales que

$$V_1 \cup V_2 = V = \overline{\{p\}},$$

entonces o bien $p \in V_1$, o bien $p \in V_2$, y por tanto $V = \overline{\{p\}} \subseteq V_1$, o bien $V = \overline{\{p\}} \subseteq V_2$.

(1.5.19) Si W es un cerrado de la variedad afín V y p es un punto genérico de W, entonces $W = \overline{\{p\}} = \{p\}$.
Sin embargo, si $\mathfrak{p}$ es un punto genérico del cerrado W de $\mathbf{Spec}k[V]$, entonces

$$W = \overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$$

(ver (1.8.14)), pero W no es necesariamente unitario. Más generalmente:

(1.5.20) Proposición. *Todo conjunto cerrado irreducible* $V \neq \emptyset$ *de* $\mathbf{Spec}A$ *tiene un único punto genérico, a saber* $\mathfrak{p} = I(V)$.

Demostración. Si $V \neq \emptyset$ es irreducible, entonces $\mathfrak{p} = I(V)$ es primo. Además

$$\mathfrak{p} \in V(I(V)) = V \text{ y } \overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(I(V)) = V$$

(ver (1.8.14)).
Por definición, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V$, en particular para todo punto genérico $\mathfrak{q}$ de V. Por otra parte, si $\mathfrak{q}$ es un punto genérico de V, entonces

$$V = \overline{\{\mathfrak{q}\}} = V(\mathfrak{q}),$$

y como $\mathfrak{p} \in V$, tenemos $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, lo que completa la prueba. □

(1.5.21) Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos.
Si $\mathfrak{q}$ es un ideal primo de B, entonces $f^{-1}(\mathfrak{p})$ es un ideal primo de A. Consideremos la aplicación

$${}^a f : \mathbf{Spec}B \longrightarrow \mathbf{Spec}A;\ \mathfrak{q} \longmapsto f^{-1}(\mathfrak{q}).$$

Dado que para todo ideal I de A

$$({}^a f)^{-1}(D(I)) = \{\mathfrak{q} \in \mathbf{Spec}B;\ I \nsubseteq f^{-1}(\mathfrak{q})\} = D(f(I) \cdot B),$$

la aplicación ${}^a f$ es continua.

(1.5.22) Proposición. *Sea I un ideal de A y $\pi : A \longrightarrow A/I$ el homomorfismo proyección. La aplicación continua*

$$^{a}\pi : \mathbf{Spec}A/I \longrightarrow \mathbf{Spec}A$$

induce un homeomorfismo entre $\mathbf{Spec}A/I$ y $V(I) \subseteq \mathbf{Spec}A$.
Además, $^{a}\pi$ es un homeomorfismo entre $\mathbf{Spec}A/I$ y $\mathbf{Spec}A$ si, y sólo si

$$I \subseteq \mathrm{Rad}0.$$

Demostración. La aplicación $^{a}\pi$ es inyectiva, continua y su imagen está contenida en $V(I)$. Además, si $U = D(J/I)$ es un abierto de $\mathbf{Spec}A/I$, entonces

$$^{a}\pi(D(J/I)) = \{\mathfrak{p} \in \mathbf{Spec}A;\ J \not\subseteq \mathfrak{p} \subseteq I\} = D(J) \cap V(I)$$

es un abierto $V(I)$, así que $^{a}\pi : \mathbf{Spec}A/I \longrightarrow V(I)$ es un homeomorfismo.

□