

Variedades algebraicas

1.6. Variedades proyectivas

(1.6.1) Sea n un número natural. Se llama *k -espacio proyectivo n -dimensional* y se denota por $\mathbb{P}^n k$ al conjunto de rectas de $\mathbb{A}^{n+1} k$ que pasan por $(0, \dots, 0)$, o equivalentemente, si asumimos que una recta viene representada por cualquiera de los puntos que la forman salvo el origen, al conjunto cociente $(k^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$, donde $(a_0, \dots, a_n) \sim (b_0, \dots, b_n)$ cuando existe $\lambda \in k$ (por supuesto no nulo), tal que $a_i = \lambda b_i$ para $0 \leq i \leq n$.

A las clases por esta relación de equivalencia se les denota por $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$, y a cualquier $n+1$ -upla $(a'_0, \dots, a'_n)$ perteneciente a la clase $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$ se le llama coordenadas homogéneas de $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$.

Un *cambio de coordenadas* en el espacio proyectivo es una aplicación

$$\psi : \mathbb{P}^n k \longrightarrow \mathbb{P}^n k$$

tal que existe una matriz inversible $A \in M_{n+1}(k)$ y para todo $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$, las coodenadas homogéneas de $\psi \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ vienen dadas por el producto de A por el vector columna $(a_0, \dots, a_n)$.

(1.6.2) Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ consideremos el subconjunto

$$U_i = \{ \langle a_0, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle; a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in k \}$$

de $\mathbb{P}^n k$. La aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_i : \quad \mathbb{A}^n &\longrightarrow U_i \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto \langle a_1, \dots, a_i, 1, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle \end{aligned}$$

es biyectiva para cada i . Además, $\bigcup_{i=0}^n U_i = \mathbb{P}^n k$, o dicho de otra manera, $\mathbb{P}^n k$ está recubierto por $n+1$ copias del espacio afín $\mathbb{A}^n k$.

Si $n \geq 1$ y $0 \leq i \leq n$, al conjunto de puntos

$$H_i = \{ \langle a_0, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle; (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \in k^n \setminus \{0\} \}$$

se le denomina *i-ésimo hiperplano del infinito*, y se corresponde biyectivamente con $\mathbb{P}^{n-1}k$ mediante la aplicación dada por

$$\mathbb{P}^{n-1}k \longrightarrow H_i; \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \longmapsto \langle a_0, \dots, a_{i-1}, 0, a_i, a_{n-1} \rangle.$$

El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n k$ es la unión disjunta de U_i y H_i .

(1.6.3) Definición. Un polinomio de $k[x_0, \dots, x_n]$ se dice que es *homogéneo* si todos sus monomios son del mismo grado. Sea $f \in k[x_0, \dots, x_n]$. Se llama *componente homogénea* de grado m de f a la suma de los monomios de grado m de f .

Se dice que un punto $p \in \mathbb{P}^n k$ es un *cero* de f si $f(a_0, \dots, a_n) = 0$ para todas las coordenadas homogéneas $(a_0, \dots, a_n)$ de p .

Se dice que un conjunto $V \subseteq \mathbb{P}^n k$ es un *conjunto algebraico proyectivo* si existe una familia de polinomios $S \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ tal que V es el conjunto de los puntos que son ceros de todos los polinomios de S al mismo tiempo. A V se le denota por $V(S)$.

(1.6.4) Si k es un cuerpo infinito entonces $p \in \mathbb{P}^n k$ es un cero de f si, y sólo si p es un cero de cada una de las componentes de f , pues si $f = f_0 + \dots + f_m$ es la descomposición de f en componentes homogéneas y $p = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= f(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) \\ &= f_0(a_1, \dots, a_n) + \lambda f_1(a_1, \dots, a_n) + \dots + \lambda^m f_m(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

para cada $\lambda \in k \setminus \{0\}$. Luego el polinomio

$$f_0(a_1, \dots, a_n) + f_1(a_1, \dots, a_n)x + \dots + f_m(a_1, \dots, a_n)x^m \in k[x]$$

tiene por raíces a todos los elementos no nulos de k , de donde se sigue que $f_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ para cada i .

Luego si V es el conjunto algebraico proyectivo $V(S)$, entonces V también es $V(S_h)$, donde S_h es el conjunto de las componentes homogéneas de los polinomios de S , y también es $V(I)$, donde I es el ideal de $k[x_0, \dots, x_n]$ generado por S_h .

(1.6.5) Definición. Un conjunto algebraico proyectivo V se dice que es una *hipersuperficie proyectiva* si $V = V(f)$, con $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ homogéneo.

Un conjunto algebraico proyectivo V se dice que es *lineal* si está definido por una familia S de polinomios homogéneos de grado uno. Si el rango de la familia S (es decir la dimensión del k -subespacio generado por S) es $n - d$, se dice que V es lineal de dimensión d .

(1.6.6) Definición. Se dice que un ideal I de $k[x_1, \dots, x_n]$ es *homogéneo* si para cada $f \in I$, las componentes homogéneas de f también pertenecen a I .

(1.6.7) Si I es homogéneo, entonces I está generado por una familia (finita) de polinomios homogéneos. En efecto, si $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un sistema generador de I , entonces el conjunto $\{f_{\alpha_i}\}_{\alpha \in A, 0 \leq i \leq m_\alpha}$ formado por sus componentes homogéneas está contenido en I además genera a I , pues si $g \in I$, entonces existen $g_1, \dots, g_p \in k[x_0, \dots, x_n]$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in A$ tales que

$$g = \sum_{j=1}^p g_j f_{\alpha_j} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_{\alpha_j}} g_j f_{\alpha_j i}.$$

Dado que $k[x_0, \dots, x_n]$ es noetheriano, se pueden elegir de entre esas componentes homogéneas un número finito de ellas de manera que sigan formando un sistema generador de I .

Recíprocamente, si I es un ideal generado por una familia de polinomios homogéneos $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$, entonces I es homogéneo, porque si $f \in I$, entonces existen $g_1, \dots, g_p \in k[x_0, \dots, x_n]$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in A$ tales que $f = \sum_{j=1}^p g_j f_{\alpha_j}$. La componente homogénea de grado i de f es la suma de los productos de los polinomios f_{α_j} con grado menor o igual a i por las componentes de grado $i - \text{grado}(f_{\alpha_j})$ de los g_j correspondientes, y por eso son elementos de I .

(1.6.8) Definición. Sea X un subconjunto de $\mathbb{P}^n k$. Se define el *ideal de* X , y se denota por $I(X)$ al conjunto de los polinomios $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ tales que cada punto $p \in X$ es un cero de f si $X \neq \emptyset$. Si $X = \emptyset$, entonces $I(X) = (x_0, \dots, x_n)$.

(1.6.9) Si k es infinito, entonces $I(X)$ es un ideal homogéneo. En efecto, el polinomio 0 pertenece a $I(X)$, y si $f, g \in I(X)$ y $h \in k[x_0, \dots, x_n]$, entonces todo $p \in X$ es un cero de $f + g$ y de fh , luego $f + g, fh \in I(X)$.

Si $f = \sum_{i=0}^m f_i$ es la descomposición de f en componentes homogéneas, entonces para todo $p = \langle a_0, \dots, a_n \rangle \in X$ se tiene que p es un cero de f . Luego cualquiera que sea $\lambda \in k \setminus \{0\}$,

$$0 = f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \sum_{i=0}^m f_i(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \sum_{i=0}^m \lambda^i f_i(a_0, \dots, a_n),$$

y por ser k infinito, esto implica que $f_i(a_0, \dots, a_n) = 0$ para cada i . Por lo tanto $f_i \in I(X)$, ya que $f_i(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^i f_i(a_0, \dots, a_n) = 0$ para cada $\lambda \in k \setminus \{0\}$.

(1.6.10) Proposición. Sea k algebraicamente cerrado y $n \geq 2$. Un conjunto algebraico proyectivo lineal L de dimensión $d \geq 1$ siempre intersecta a una hipersuperficie $V = V(f)$.

Demostración. Dado que todo conjunto algebraico proyectivo lineal de dimensión $d \geq 1$ contiene un conjunto algebraico proyectivo lineal de dimensión 1 (una recta proyectiva), basta probar la afirmación para L con $d = 1$. Como L es lineal, L está definido por una familia S de polinomios homogéneos de grado 1. Además, como la dimensión del k -subespacio generado por S es $n - 1$, podemos elegir una base $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}$ de dicho subespacio. Entonces $L = V(S) = V(f_1, \dots, f_{n-1})$.

Sea ψ el cambio de coordenadas proyectivas definido por la matriz inversible

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

donde $f_i = \sum_{j=0}^n a_{(i+1)j} x_j$ para $1 \leq i \leq n - 1$. Entonces

$$\psi(L) = \{\langle a_0, a_1, 0, \dots, 0 \rangle; (a_0, a_1) \neq (0, 0)\} = V(x_2, \dots, x_n)$$

y $\psi(V) = V(g)$, donde g es el polinomio homogéneo

$$g = f\left(\sum_{i=0}^n b_{0i} x_i, \dots, \sum_{i=0}^n b_{ni} x_i\right),$$

siendo $A^{-1} = (b_{ij})$. Dado que g es homogéneo, el polinomio

$$p(x_0, x_1) = g(x_0, x_1, 0, \dots, 0)$$

es o bien nulo, o bien un polinomio homogéneo del mismo grado que g y f . En el primer caso es obvio que $\psi(L) \subseteq \psi(V)$ y por eso $\psi(L) \cap \psi(V) = \psi(L)$. En el segundo caso, si la variable x_0 está en algún monomio de p , entonces por ser k algebraicamente cerrado existe $a_0 \in k$ tal que $p(a_0, 1) = 0$, y de manera similar, si x_0 no está en ningún monomio de p , entonces x_1 está en alguno y existe $a_1 \in k$ tal que $p(1, a_1) = 0$, luego $\psi(L) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. $\square$

(1.6.11) Definición. Un conjunto algebraico proyectivo se dice que es *irreducible* cuando no se puede poner como unión de dos subconjuntos algebraicos proyectivos propios.

(1.6.12) Un argumento similar al utilizado para los conjuntos algebraicos afines, y también como consecuencia de que $k[x_0, \dots, x_n]$ es noetheriano, nos muestra que si V es un conjunto algebraico proyectivo, entonces existen unos únicos (salvo el orden) conjuntos algebraicos proyectivos irreducibles $V_1, \dots, V_m$ tales que $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$ y $V_i \not\subseteq V_j$ si $i \neq j$. A estos conjuntos algebraicos proyectivos se les llama componentes irreducibles de V .

(1.6.13) Lema. Sea I un ideal homogéneo de $k[x_0, \dots, x_n]$. Entonces I es primo si, y sólo si siempre que el producto de dos polinomios homogéneos f y g pertenezca a I , entonces o bien $f \in I$ o bien $g \in I$.

Demostración. Si $f = \sum_{i=0}^m f_i$ y $g = \sum_{j=0}^p g_j$ son las expresiones de los polinomios f y g como suma de componentes homogéneas y $fg \in I$, entonces $\sum_{i+j=k} f_i g_j \in I$ para todo $k \in \{0, \dots, m+n\}$ porque I es homogéneo y $fg = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} f_i g_j$ es la expresión de fg como suma de componentes homogéneas.

Supongamos que alguna de las componentes homogéneas de g no pertenece a I , y sea l el natural más pequeño tal que $g_l \notin I$, esto es, $g_0, \dots, g_{l-1} \in I$ y $g_l \notin I$.

Veamos que $f_p \in I$ por inducción sobre p .

Para $p = 0$, dado que $\sum_{i+j=l} f_i g_j \in I$ y $f_i g_j \in I$ para $1 \leq i \leq l$, tenemos que $f_0 g_l \in I$, y por la hipótesis, $f_0 \in I$ ya que $g_l \notin I$.

Supongamos que $f_0, \dots, f_{p-1} \in I$. Dado que $\sum_{i+j=p+l} f_i g_j \in I$ y $f_i g_j \in I$ para $i < p$ o $j < l$. Luego $f_p \in I$ dado que $g_l \notin I$, entonces $f_p g_l \in I$.

Por lo tanto $f = \sum_{i=0}^n f_i \in I$.

Recíprocamente, si f y g son homogéneos tales que $fg \in I$, e I es primo, entonces $f \in I$ o $g \in I$. $\square$

(1.6.14) Proposición. Sea V un conjunto algebraico proyectivo. Entonces V es irreducible si, y sólo si $I(V)$ es un ideal homogéneo primo.

Demostración. Sea $I = I(V)$ un ideal propio homogéneo de $k[x_0, \dots, x_n]$. Por el lema anterior, para que I sea primo basta que siempre que el producto de dos polinomios homogéneos esté en I , alguno de los dos pertenezca a I . Si f y g son polinomios homogéneos y $fg \in I(V)$ entonces

$$V(f) \cup V(g) = V(fg) \supseteq V(I(V)) = V,$$

y por ser V irreducible, o bien $V \subseteq V(f)$ o bien $V \subseteq V(g)$. Luego o bien $f \in I(V(f)) \subseteq I(V)$ o bien $g \in I(V(g)) \subseteq I(V)$.

Recíprocamente, si $I(V)$ es primo y $V_1 \cup V_2 \subseteq V$, donde V_1 y V_2 son conjuntos algebraicos proyectivos, entonces

$$I(V_1)I(V_2) = I(V_1 \cup V_2) = I(V),$$

por lo que o bien $I(V_1) \subseteq I(V)$, o bien $I(V_2) \subseteq I(V)$. Luego o bien

$$V = V(I(V)) \subseteq V(I(V_1)) = V_1$$

o bien

$$V = V(I(V)) \subseteq V(I(V_2)) = V_2.$$

□

(1.6.15) Definición. Sea A un anillo. Una $(\mathbb{Z}-)$ graduación en A es una familia de subgrupos aditivos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de A tales que

(1.6.15.1) $A_n \cdot A_m \subseteq A_{n+m}$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{Z}$;

(1.6.15.2) $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n = A$.

Si A admite una graduación se dice A es *graduado*, y si $A_n = 0$ para todo $n < 0$, se dice que A es *positivamente graduado*.

(1.6.16) Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una graduación de A , entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$, a los elementos de A_n se les denomina *elementos homogéneos de grado n* .

Todo elemento $a \neq 0$ del anillo A se expresa de forma única como suma finita de elementos homogéneos no nulos de A . A esos elementos homogéneos se les llama *componentes homogéneas* de a .

(1.6.17) Definición. Sea A un anillo graduado. Un ideal I de A se dice que es *homogéneo* si las componentes homogéneas de cualquier elemento de I también pertenecen a I .

(1.6.18) Proposición. Sea I un ideal del anillo graduado A con la graduación $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Son equivalentes:

(1.6.18.1) I es homogéneo;

(1.6.18.2) I está generado por una familia de elementos homogéneos;

(1.6.18.3) el cociente A/I es un anillo graduado con la graduación

$$\{(A_n + I)/I\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Demostración. (1) $\Leftrightarrow$ (2) se ha probado en (1.6.7).

(1) $\Rightarrow$ (3). Dado que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una graduación de A , la suma de la familia de subgrupos $\{(A_n + I)/I\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es A/I , y

$$((A_n + I)/I)((A_m + I)/I) \subseteq (A_{n+m} + I)/I$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Si $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}$ y $\bar{a}_i \in (A_{n_i} + I)/I$ son tales que $\sum_{i=1}^p \bar{a}_i = 0$, entonces $\sum_{i=1}^p a_i \in I$. Sin pérdida de generalidad se puede elegir $a_i \in A_{n_i}$ para cada i , y como I es homogéneo, $a_i \in I$, esto es, $\bar{a}_i = 0$ para cada i . Luego la suma $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (A_n + I)/I$ es directa.

(3) $\Rightarrow$ (1). Si $a \in I$ y $\{a_i \in A_{n_i}\}_{1 \leq i \leq p}$ son sus componentes homogéneas, entonces $\bar{a}_i \in (A_{n_i} + I)/I$ y $\sum_{i=1}^p \bar{a}_i = \bar{a} = 0$ en A/I . Este hecho, junto con la hipótesis, implica que $\bar{a}_i = 0$, esto es, que $a_i \in I$ para cada i . □

(1.6.19) Teorema. (de los ceros, versión proyectiva). Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado e I un ideal homogéneo de $k[x_0, \dots, x_n]$.

$V(I) = \emptyset$ si y sólo si existe $m > 0$ tal que I contiene a todos los polinomios homogéneos de grado mayor o igual a m .

Si $V(I) \neq \emptyset$, entonces $I(V(I)) = \text{Rad}I$.

Demostración. Si $I = k[x_0, \dots, x_n]$, entonces $V(I) = \emptyset$ y la primera afirmación es trivialmente cierta.

Si I es propio, entonces el cono de $V = V(I)$ es

$$C(V) = V(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}k$$

(ver (1.8.22)). Decir que $V(I) = \emptyset$ equivale a decir que $C(V) = \{(0, \dots, 0)\}$, y dado que el radical de I es $I(C(V))$ por el teorema de los ceros de Hilbert (versión fuerte), a decir que $\text{Rad}I = (x_0, \dots, x_n)$.

Por otra parte, como $V = V(I) \neq \emptyset$, por (1.8.22) se tiene

$$I(V) = I(C(V)) = \text{Rad}I.$$

□

(1.6.20) Definición. Una *variedad proyectiva* es un conjunto algebraico proyectivo irreducible.

Si V es una variedad proyectiva, se llama *anillo de coordenadas proyectivas de V* al anillo graduado $k[V] = k[x_0, \dots, x_n]/I(V)$.

(1.6.21) El anillo de coordenadas proyectivas de una variedad es un dominio de integridad graduado noetheriano.

(1.6.22) Sea V una variedad proyectiva. Al cuerpo de fracciones del dominio de integridad $k[V]$ se le denota por $k_h(V)$ y se denomina *cuerpo de funciones homogéneas de V* . Ningún elemento $\bar{f}$ de $k[V]$, salvo aquellos con $f \in k$, determinan funciones de V en k . Sin embargo, si $z = \bar{f}/\bar{g} \in k_h(V)$ y f y g son homogéneos del mismo grado, entonces

$$z : \langle a_0, \dots, a_n \rangle \longmapsto f(a_0, \dots, a_n)/g(a_0, \dots, a_n)$$

es una aplicación de $V \setminus V(g)$ en k .

El conjunto

$$\{z \in k_h(V); \exists f, g \text{ homogéneos, grado } f = \text{grado } g, z = \bar{f}/\bar{g}\}$$

es un cuerpo contenido en $k_h(V)$, que se denomina *cuerpo de funciones racionales de V* y se denota por $k(V)$.

(1.6.23) Sea $p = \langle a_0, \dots, a_n \rangle \in V$. Se dice que una función racional $z \in k(V)$ está definida en p si existen polinomios homogéneos del mismo grado f y g tales que $g(a_0, \dots, a_n) \neq 0$ y $z = \overline{f/g}$. En este caso, el valor de z en p es $f(a_0, \dots, a_n)g(a_0, \dots, a_n)^{-1}$.

El conjunto de funciones racionales definidas en un punto p es un subanillo local de $k(V)$ que se denota $\mathcal{O}_p(V)$.

(1.6.24) Lema. Sea $G = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} G_n$ un anillo graduado. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de G , entonces el ideal $\mathfrak{p}^*$ generado por los elementos homogéneos de $\mathfrak{p}$ es un ideal primo homogéneo.

Demostración. Por definición $\mathfrak{p}^*$ es un ideal homogéneo y además $\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}$. Para ver que $\mathfrak{p}^*$ es primo, por (1.6.13) basta comprobar que si el producto de dos polinomios homogéneos f y g es de $\mathfrak{p}^*$, entonces $f \in \mathfrak{p}^*$ o $g \in \mathfrak{p}^*$. Si $fg \in \mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}$, entonces o bien $f \in \mathfrak{p}$ o bien $g \in \mathfrak{p}$, y como ambos son homogéneos, o bien $f \in \mathfrak{p}^*$ o bien $g \in \mathfrak{p}^*$. $\square$

(1.6.25) Definición. Un ideal primo $\mathfrak{p}$ del anillo A se dice que es un *divisor del ideal* I de A si $I \subseteq \mathfrak{p}$.

(1.6.26) Proposición. Si G es un anillo graduado e I es un ideal homogéneo de G , entonces todo divisor primo minimal de I es homogéneo.

Demostración. Si $\mathfrak{p}$ es un divisor primo minimal, esto es, que no contiene estrictamente a otro divisor de I , entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^*$, porque $\mathfrak{p}^*$ es primo por (1.6.24) y

$$I \subseteq \mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}$$

al ser I homogéneo. Luego $\mathfrak{p}$ es homogéneo. $\square$

(1.6.27) Corolario. Si I es un ideal homogéneo del anillo graduado G , entonces $\text{Rad} I$ es un ideal homogéneo.

Demostración. En efecto, $\text{Rad} I = \bigcap_{I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ es intersección de ideales homogéneos. $\square$

(1.6.28) Corolario. Si k es algebraicamente cerrado, entonces las componentes irreducibles de un cono son conos.

Demostración. Si V es un cono de $\mathbb{A}^{n+1}k$, entonces el ideal $I = I(V)$ es homogéneo. Las componentes irreducibles de V se corresponden biyectivamente con los divisores primos minimales de $I(V)$.

En efecto, si $V_1, \dots, V_s$ son las componentes irreducibles de V , entonces $I(V_i)$ es primo. Si $\mathfrak{p}$ es un divisor primo de I , entonces

$$I = I(V(I)) = I(V_1 \cup \dots \cup V_s) = I(V_1) \cap \dots \cap I(V_s) \subseteq \mathfrak{p},$$

y como $\mathfrak{p}$ es primo, existe $i \in \{1, \dots, s\}$ tal que $I(V_i)$ está contenido en $\mathfrak{p}$. Luego $I(V_1), \dots, I(V_s)$, que son distintos dos a dos porque $V_i \not\subseteq V_j$ para i y j cualesquiera, son los divisores primos minimales de I .

Como los divisores primos minimales del ideal homogéneo I son ideales homogéneos y k es algebraicamente cerrado, $V_i = V(I(V_i))$ es un cono de $\mathbb{A}^{n+1}k$ para cada i . $\square$

(1.6.29) Sea k algebraicamente cerrado, $V \subseteq \mathbb{P}^n k$ una variedad proyectiva e $I = I(V)$. Entonces I es un ideal primo homogéneo y el cono $C(V)$, cuyo ideal es el propio I , es una variedad afín. Además, el anillo de coordenadas de $C(V)$ es el anillo de coordenadas $k[V] = k[x_1, \dots, x_n]/I$ de V .

Por el teorema de los ceros (ver (1.4.6)) existe una correspondencia biyectiva entre los ideales homogéneos radicales de $k[V]$ contenidos en $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$ y los conjuntos algebraicos proyectivos contenidos en V .

Mediante esta biyección los ideales primos de $k[V]$ se corresponden con las subvariedades de V .

Sea G un anillo positivamente graduado con la graduación $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Se denota por G_+ al ideal maximal

$$G_+ = \bigoplus_{i>0} G_i .$$

Si I es un ideal homogéneo de G , denotemos por $V(I)$ al conjunto de los ideales primos homogéneos de G que no contienen a G_+ y que contienen a I

$$V(I) = \{\mathfrak{p}; \mathfrak{p} \text{ ideal primo de } G, I \subseteq \mathfrak{p} \not\subseteq G_+\} .$$

$V(0)$ está formado por todos los ideales primos homogéneos de G , mientras $V(G_+) = \emptyset$. Además,

$$V(I) \cup V(J) = \{\mathfrak{p}; \mathfrak{p} \text{ ideal primo de } G, I \subseteq \mathfrak{p} \not\subseteq G_+ \text{ o } J \subseteq \mathfrak{p} \not\subseteq G_+\} = V(IJ)$$

y

$$\bigcap_{a \in A} V(I_a) = \{\mathfrak{p}; \mathfrak{p} \text{ ideal primo de } G, I_a \subseteq \mathfrak{p} \not\subseteq G_+, \forall a \in A\} = V\left(\sum_{a \in A} I_a\right),$$

con lo que los conjuntos $V(I)$ constituyen la familia de cerrados de una topología en el conjunto de los ideales primos homogéneos de G que no contienen a G_+ .

(1.6.30) Definición. Sea G un anillo positivamente graduado. Se llama *espectro homogéneo de G* , y se denota por $\mathbf{Proj} G$ al conjunto de los ideales primos homogéneos de G que no contienen a G_+ dotado de la topología, denominada *topología de Zariski*, cuyos cerrados son los conjuntos $V(I)$ donde I es un ideal homogéneo de G .

(1.6.31) Como $\mathbf{Proj}G$ está contenido en $\mathbf{Spec}G$, se puede dotar a $\mathbf{Proj}G$ de la topología inducida de la de Zariski en $\mathbf{Spec}G$. Si $V = V(I)$ es un cerrado de $\mathbf{Proj}G$, entonces

$$V(I) = \mathbf{Proj}G \cap \{\mathfrak{p}; \mathfrak{p} \in \mathbf{Spec}G, I \subseteq \mathfrak{p}\},$$

luego V es cerrado en la topología inducida.

Recíprocamente, si $V = V(I) \cap \mathbf{Proj}G$, con I un ideal de G , es un cerrado en la topología inducida, entonces el ideal J generado por las componentes homogéneas de los elementos de I es un ideal homogéneo y

$$V(J) = V(I) \cap \mathbf{Proj}G = V(I).$$

Por lo tanto, la topología de Zariski en $\mathbf{Proj}G$ es la topología inducida de la topología de Zariski de $\mathbf{Spec}G$.

(1.6.32) Por otra parte, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, la aplicación

$$\varphi_i : \mathbb{A}^n k \longrightarrow U_i \subseteq \mathbb{P}^n k; (a_1, \dots, a_n) \longmapsto (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_i, \dots, a_n),$$

es un homeomorfismo.

En efecto, si $V = V(I)$ es cerrado de $\mathbb{P}^n k$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi_i^{-1}(\varphi_i(V \cap U_i)) &= \{(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n) \in V(I)\} \\ &= V(J) \subseteq \mathbb{A}^n k, \end{aligned}$$

donde J es el ideal

$$J = \{f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n); f \in I\},$$

luego φ_i es continua.

Si $V = V(J)$ es un cerrado de la topología de Zariski de $\mathbb{A}^n k$, sea J^* el ideal homogéneo generado por $\{f^*; 0 \neq f \in J\}$, donde

$$f^* = \sum_{j=0}^m x_i^{m-j} f_j(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in k[x_0, \dots, x_n]$$

siendo $f = \sum_{j=0}^m f_j$ las componentes homogéneas de $0 \neq f \in k[x_1, \dots, x_n]$ y m el grado de f . La imagen por φ_i de $V(J)$ es

$$\varphi_i(V(J)) = U_i \cap V(J^*),$$

que es cerrado en la topología de Zariski de U_i .

(1.6.33) Definición. Si $0 \neq f \in k[x_1, \dots, x_n]$ es de grado m , se llama *homogeneizado de f* a

$$f^* = \sum_{j=0}^m x_0^{m-j} f_j(x_1, \dots, x_m) \in k[x_0, \dots, x_n],$$

donde f_j es la componente homogénea de grado j de f . Si $f = 0$, entonces $f^* = 0$.

Si $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ es un polinomio homogéneo, se llama *deshomogeneizado de f* al polinomio

$$f_* = f(1, x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n].$$

(1.6.34) Proposición. Sea n un entero positivo.

(1.6.34.1) Si $f, g \in k[x_0, \dots, x_n]$, entonces $(f+g)_* = f_* + g_*$ y $(fg)_* = f_* g_*$;

(1.6.34.2) si $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$, entonces $(fg)^* = f^* g^*$ y

$$x_0^q (f+g)^* = x_0^{\text{grado}(g)} f^* + x_0^{\text{grado}(f)} g^*,$$

donde $q = \text{grado}(f) + \text{grado}(g) - \text{grado}(f+g)$;

(1.6.34.3) si $f \in k[x_1, \dots, x_n]$, entonces $(f^*)_* = f$;

(1.6.34.4) si $f \in k[x_0, \dots, x_n]$, entonces $x_0^r (f_*)^* = f$, donde r es el mayor número natural tal que x_0^r divide a f .

(1.6.35) Si $I \neq (0)$ es un ideal de $k[x_1, \dots, x_n]$, denotaremos por I^* al ideal homogéneo de $k[x_0, \dots, x_n]$ generado por $\{f^*; 0 \neq f \in I\}$.

Si J es un ideal de $k[x_0, \dots, x_n]$, denotaremos por J_* al ideal $\{f_*; f \in J\}$.

(1.6.36) Definición. Si $V = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n k$, se denota por V^* al conjunto algebraico proyectivo $V(I(V)^*)$.

Si $V = V(J) \subseteq \mathbb{P}^n k$, denotaremos por V_* a $V(I(V)_*)$.

(1.6.37) Proposición. Si $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ es un conjunto algebraico afín, entonces V^* es la clausura de $\varphi_0(V) \subseteq U_0 \subseteq \mathbb{P}^n k$ en la topología de Zariski de $\mathbb{P}^n k$.

Si $V \subseteq \mathbb{P}^n k$ es un conjunto algebraico proyectivo, entonces

$$V_* = V \cap \mathbb{A}^n k$$

(identificando $\mathbb{A}^n k$ con $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n k$).

Demostración. Si V es un conjunto algebraico afín, dado que

$$I(V)^* = \{F^*; 0 \neq f \in I(V)\},$$

tenemos que $V(I(V)^*)$ es un cerrado que contiene a

$$\varphi_0(V) = \{\langle 1, a_1, \dots, a_n \rangle; (a_1, \dots, a_n) \in V\}.$$

Si J es un ideal homogéneo y $\varphi_0(V) \subseteq V(J)$, entonces $f_* \in I(V)$, y por lo tanto

$$f = x_0^r(f_*)^* \in I(V)^*$$

para todo $f \in J$. Luego $J \subseteq I(V)^*$, y esto implica que $V^* \subseteq V(J)$, con lo que V^* es el menor cerrado de $\mathbb{P}^n k$ que contiene a $\varphi_0(V)$.

Por otra parte, si V es un conjunto algebraico proyectivo, entonces

$$(a_1, \dots, a_n) \in V_* = V(I(V)_*) \Leftrightarrow \langle 1, a_1, \dots, a_n \rangle \in V,$$

con lo que $V_* = V \cap U_0$. □

(1.6.38) Proposición. Si k es algebraicamente cerrado y $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ es un conjunto algebraico afín, entonces $(V^*)_* = V$.

Demostración. Si $J \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal, entonces $I(V(J))^* = I(V(J^*))$. En efecto, si $f \in I(V(J)) = \text{Rad}(J)$, entonces existe $n > 0$ tal que $f^n \in J$, con lo que $(f^*)^n = (f^n)^* \in J^*$, luego $f^* \in \text{Rad}(J^*) = I(V(J^*))$. Recíprocamente, $J^* \subseteq I(V(J))^*$, y además $I(V(J))^*$ es un ideal radical, porque $I(V(J))$ es radical y si $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ es tal que $f^n \in I(V(J))^*$, entonces $f_*^n \in I(V(J))$, con lo que $f_* \in I(V(J))$, y de ahí $f = x_0^r(f_*)^* \in I(V(J))^*$. Por lo tanto,

$$I(V(J^*)) = \text{Rad}(J^*) \subseteq I(V(J))^*.$$

Esto implica que $I(V^*) = I(V(I(V)^*)) = I(V(I(V)))^* = I(V)^*$.

Por (1.6.37),

$$(V^*)_* = V(I(V^*)_*) = V((I(V)^*)_*) = V(I(V)) = V.$$

□

(1.6.39) Proposición. Sea k algebraicamente cerrado.

(1.6.39.1) Si $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ es un conjunto algebraico afín, entonces V es irreducible si, y sólo si V^* es irreducible.

(1.6.39.2) Si $V = V_1 \cup \cdots \cup V_s$ es la descomposición en componentes irreducibles del conjunto algebraico afín V , entonces

$$V^* = V_1^* \cup \cdots \cup V_s^*$$

es la descomposición en irreducibles de V^* .

(1.6.39.3) Si $V = V_1 \cup \cdots \cup V_s$ es la descomposición en componentes irreducibles del conjunto algebraico proyectivo V y $V_i \not\subseteq H_0$ para cada i , entonces

$$V_* = (V_1)_* \cup \cdots \cup (V_s)_*$$

es la descomposición en irreducibles de V_* .

(1.6.39.4) La aplicación $V \mapsto V^*$ es una biyección entre los conjuntos algebraicos afines $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ no vacíos y los conjuntos algebraicos proyectivos de $\mathbb{P}^n k$ que no tienen ninguna componente irreducible en H_0 .

Demostración. (1) Si $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ es un conjunto algebraico afín irreducible, y $V^* = V_1 \cup V_2$, con $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n k$ conjuntos algebraicos proyectivos, entonces

$$V = (V^*)_* = V^* \cap \mathbb{A}^n k = (V_1 \cap \mathbb{A}^n k) \cup (V_2 \cap \mathbb{A}^n k),$$

así que $V = V_i \cap \mathbb{A}^n k = (V_i)_*$ para algún $i \in \{1, 2\}$. Luego

$$V^* = ((V_i)_*)^* \subseteq V_i$$

para ese mismo i , con lo que V^* es irreducible.

Recíprocamente, si V^* es irreducible, y $V = V_1 \cup V_2$, con $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{A}^n k$ conjuntos algebraicos afines, entonces

$$V^* = V(I(V)^*) = V(I(V_1)^* \cap I(V_2)^*) = V_1^* \cup V_2^*,$$

así que $V^* = V_i^*$ para algún $i \in \{1, 2\}$. Luego

$$V = (V^*)_* = (V_i^*)_* = V_i.$$

(2) Si $V = V_1 \cup \cdots \cup V_s$ es la descomposición de V en irreducibles, entonces

$$V^* = V(I(V)^*) = V(I(V_1)^* \cap \cdots \cap I(V_s)^*) = V_1^* \cup \cdots \cup V_s^*$$

y por (1), V_i^* es irreducible para cada $i \in \{1, \dots, s\}$. Además, si $V_i^* \subseteq V_j^*$, entonces

$$V_i = (V_i^*)_* \subseteq (V_j^*)_* = V_j,$$

lo que contradice que la unión $V_1 \cup \dots \cup V_s$ es irredundante. Luego $V_1^*, \dots, V_s^*$ son las componentes irreducibles de V^* .

Si $V = V_1 \cup \dots \cup V_s$ es la descomposición de V en irreducibles, que por hipótesis no están contenidos en H_0 , entonces $(V_i)_* \neq \emptyset$ es irreducible, o equivalentemente $I(V_i)_*$ es primo, pues si $f_*g_* = (fg)_* \in I(V_i)_*$, entonces

$$fg = x_0^r((fg)_*)^* \in I(V_i),$$

que es primo, así que o bien $f \in I(V_i)$ o bien $g \in I(V_i)$, de donde o bien $f_* \in I(V_i)_*$ o bien $g_* \in I(V_i)_*$. Además la unión

$$(V_1)_* \cup \dots \cup (V_s)_* = V(I(V_1)_* \cap \dots \cap I(V_s)_*) = V(I(V)_*) = V_*$$

es irredundante porque si $(V_i)_* \subseteq (V_j)_*$, entonces $f_* \in I(V_i)_*$ para todo $f \in I(V_j)$, y dado que $x_0 \notin I(V_i)$ e $I(V_i)$ es primo,

$$f = x_0^r(f_*)^* \in I(V_i),$$

para todo $f \in I(V_j)$, con lo que $I(V_j) \subseteq I(V_i)$, y esto contradice que $V_i \not\subseteq V_j$ para $i, j \in \{1, \dots, s\}$.

Luego $V_* = (V_1)_* \cup \dots \cup (V_s)_*$ es la descomposición de V_* en irreducibles.

(4) Si $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{A}^n k$, entonces por (2) las componentes irreducibles de V^* son $V_1^*, \dots, V_s^*$, siendo $V_1, \dots, V_s$ las componentes irreducibles de V . Si $V_i^* \subseteq H_0$ para algún i , entonces

$$V_i = (V_i^*)_* = V_i^* \cap U_0 = \emptyset,$$

lo que contradice que V_i es una componente irreducible de V . Luego $V_i^* \not\subseteq H_0$ para cada $i \in \{1, \dots, s\}$.

Recíprocamente, si $V \subseteq \mathbb{P}^n k$ es un conjunto algebraico proyectivo y ninguna componente irreducible de V está contenida en H_0 , entonces $V \not\subseteq H_0$, luego

$$V = (V^*)_* = V^* \cap \mathbb{A}^n k \neq \emptyset.$$

Por una parte, si $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ es un conjunto algebraico afín, entonces

$$(V^*)_* = V(I(V(I(V)^*))_*) = V((I(V)^*)_*) = V(I(V)) = V.$$

Por otra parte, si $V \subseteq \mathbb{P}^n k$ es un conjunto algebraico afín tal que ninguna de sus componentes irreducibles está en H_0 , entonces $V_* = V \cap \mathbb{A}^n k \subseteq V$, con lo que $(V_*)^* \subseteq V$ por ser V cerrado y $(V_*)^*$ la clausura de V_* en $\mathbb{P}^n k$.

La otra inclusión, $V \subseteq (V_*)^*$ basta comprobarla para V irreducible, porque si $V = V_1 \cup \cdots \cup V_s$ es la descomposición de V en irreducibles y $((V_i)_*)^* = V_i$ para cada irreducible V_i , entonces

$$(V_*)^* = ((V_1)_* \cup \cdots \cup (V_s)_*)^* = ((V_1)_*)^* \cup \cdots \cup ((V_s)_*)^* = V_1 \cup \cdots \cup V_s = V.$$

Veamos que en efecto, si V es irreducible, entonces $(V_*)^* = V$. El ideal $I(V)_*$ es primo porque V_* es irreducible (es la única componente irreducible de V_*). Si f es un elemento de $I(V_*) = I(V)_*$, entonces $f = g_*$ para algún $g \in I(V)$ y existe $r \geq 0$ tal que $x_0^r f^* = g \in I(V)$. Como $x_0 \notin I(V)$ e $I(V)$ es primo, tenemos que $f^* \in I(V)$. Luego $I(V_*)^* \subseteq I(V)$, lo que implica que

$$V = V(I(V)) \subseteq V(I(V_*)^*) = (V_*)^*.$$

□