

Variedades algebraicas

1.7. Concepto general de variedad

Sea k un cuerpo infinito.

(1.7.1) Sea m y n números naturales. La aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n k \times \mathbb{A}^m k &\longrightarrow \mathbb{A}^{n+m} k \\ (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_m) &\longmapsto (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \end{aligned}$$

es biyectiva. En lugar de dotar a dicho producto de estructura de espacio topológico con la topología producto, consideremos en $\mathbb{A}^n k \times \mathbb{A}^m k$ la topología de Zariski de $\mathbb{A}^{n+m} k$.

(1.7.2) En el caso proyectivo

$$\langle a_0, \dots, a_n \rangle, \langle b_0, \dots, b_m \rangle \longmapsto \langle a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \rangle$$

no está ni siquiera bien definida, porque $\langle \lambda a_0, \dots, \lambda a_n \rangle = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ y sin embargo

$$\langle \lambda a_0, \dots, \lambda a_n, b_0, \dots, b_m \rangle \neq \langle a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \rangle$$

cuando $\lambda \neq 1$.

(1.7.3) Definición. Un polinomio $f \in k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ se dice que es *bihomogéneo de bigrado* (p, q) si es homogéneo de grado p como elemento del anillo graduado $(k[y_0, \dots, y_m])[x_0, \dots, x_n]$ y homogéneo de grado q como elemento de $(k[x_0, \dots, x_n])[y_0, \dots, y_m]$.

Todo polinomio $f \in k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ se descompone de forma única como suma de polinomios bihomogéneos no nulos. A estos polinomios se les llama componentes bihomogéneas de f .

(1.7.4) Definición. Si $f \in k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$, decimos que

$$p = (\langle a_0, \dots, a_n \rangle, \langle b_0, \dots, b_m \rangle) \in \mathbb{P}^n k \times \mathbb{P}^m k$$

es un *cero de f* si

$$f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n, \mu b_0, \dots, \mu b_m) = 0$$

para todo $\lambda, \mu \in k \setminus \{0\}$.

Si $S \subseteq k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$, llamamos *conjunto algebraico biproyectivo* definido por S al conjunto

$$V(S) = \{p \in \mathbb{P}^n k \times \mathbb{P}^m k; p \text{ es cero de } f, \forall f \in S\}.$$

Si $p = (\langle a_0, \dots, a_n \rangle, \langle b_0, \dots, b_m \rangle) \in \mathbb{P}^n k \times \mathbb{P}^m k$ es un cero de f , entonces p es un cero de cada una de las componentes bihomogéneas de f .

(1.7.5) Definición. Un ideal I de $k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ se dice que es *bihomogéneo* si está generado por polinomios bihomogéneos, o equivalentemente si las componentes bihomogéneas de cada elemento f de I pertenecen a I .

(1.7.6) Si V es el conjunto algebraico biproyectivo definido por el conjunto de polinomios $S \subseteq k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$, entonces $V = V(I)$, donde I es el ideal bihomogéneo generado por las componentes bihomogéneas de los elementos de S .

El conjunto

$$I(V) = \{f \in k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]; p \text{ es cero de } f, \forall p \in V\}$$

es un ideal bihomogéneo radical de $k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ que se denomina *ideal de V* .

Como consecuencia de (1.2.4) tenemos que:

(1.7.7) Teorema. *Todo ideal bihomogéneo I de $k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ está generado por un conjunto finito de polinomios bihomogéneos.*

Todo conjunto algebraico biproyectivo está definido por una familia finita de polinomios bihomogéneos.

(1.7.8) Definición. Un conjunto algebraico biproyectivo V se dice que es una *variedad biproyectiva* si V es irreducible, esto es, si $V = V_1 \cup V_2$, siendo V_1 y V_2 conjuntos algebraicos biproyectivos, entonces o bien $V = V_1$, o bien $V = V_2$.

La demostración del siguiente resultado es análoga a la de (1.2.9) o a la de (1.6.14).

(1.7.9) Proposición. *Un conjunto algebraico biproyectivo V es irreducible si, y sólo si el ideal bihomogéneo $I(V)$ es un ideal primo.*

(1.7.10) Los conjunto algebraicos biproyectivos de $\mathbb{P}^n k \times \mathbb{P}^m k$ constituyen la familia de cerrados de una topología llamada *topología de Zariski* de $\mathbb{P}^n k \times \mathbb{P}^m k$.

(1.7.11) Sean m y n enteros positivos y $p = (m+1)(n+1) - 1 = mn + m + n$. Definamos $S : \mathbb{P}^m k \times \mathbb{P}^n k \longrightarrow \mathbb{P}^p k$ por

$$\langle a_0, \dots, a_m \rangle, \langle b_0, \dots, b_n \rangle \longmapsto \langle a_0 b_0, \dots, a_0 b_n, \dots, a_m b_0, \dots, a_m b_n \rangle.$$

S es una aplicación porque si $\langle a_0, \dots, a_m \rangle, \langle b_0, \dots, b_n \rangle \in \mathbb{P}^m k \times \mathbb{P}^n k$, entonces existen i, j tales que $a_i \neq 0 \neq b_j$, con lo que

$$\langle a_0 b_0, \dots, a_0 b_n, \dots, a_m b_0, \dots, a_m b_n \rangle \in \mathbb{P}^p k$$

al ser $a_i b_j \neq 0$, y si $\lambda, \mu \in k \setminus \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned} S(\langle a_0, \dots, a_m \rangle, \langle b_0, \dots, b_n \rangle) &= \langle a_0 b_0, \dots, a_0 b_n, \dots, a_m b_0, \dots, a_m b_n \rangle \\ &= \langle \lambda \mu a_0 b_0, \dots, \lambda \mu a_0 b_n, \dots, \lambda \mu a_m b_0, \dots, \lambda \mu a_m b_n \rangle \\ &= S(\langle \lambda a_0, \dots, \lambda a_m \rangle, \langle \mu b_0, \dots, \mu b_n \rangle). \end{aligned}$$

Además S es inyectiva, porque si

$$\begin{aligned} &\langle a_0 b_0, \dots, a_0 b_n, \dots, a_m b_0, \dots, a_m b_n \rangle \\ &= \langle c_0 d_0, \dots, c_0 d_n, \dots, c_m d_0, \dots, c_m d_n \rangle, \end{aligned}$$

entonces existe $\rho \in k \setminus \{0\}$ tales que $a_i b_j = \rho c_i d_j$ para todo i, j . Elijamos i y j tales que $a_i \neq 0 \neq b_j$, y sean

$$\lambda = a_i c_i^{-1} \neq 0 \quad , \quad \mu = b_j d_j^{-1} \neq 0.$$

Entonces $\rho = \lambda \mu$, y

$$a_k b_l = (a_i c_i^{-1})(b_j d_j^{-1}) c_k d_l.$$

para todo k, l . Por lo tanto, para todo $l \in \{1, \dots, n\}$,

$$a_i b_l = (a_i c_i^{-1})(b_j d_j^{-1}) c_i d_l = a_i (b_j d_j^{-1}) d_l,$$

y esto implica que $b_l = \mu d_l$. De manera similar, para todo $k \in \{1, \dots, m\}$,

$$a_k b_j = (a_i c_i^{-1})(b_j d_j^{-1}) c_k d_j = (a_i c_i^{-1}) c_k b_j,$$

y de ahí $a_k = \lambda c_k$ por ser $b_j \neq 0$.

Luego $\langle a_0, \dots, a_m \rangle = \langle c_0, \dots, c_m \rangle$ y $\langle b_0, \dots, b_n \rangle = \langle d_0, \dots, d_n \rangle$.

(1.7.12) La aplicación $S : \mathbb{P}^m k \times \mathbb{P}^n k \longrightarrow \mathbb{P}^p k$ es continua, porque si $V = V(J)$ es un cerrado de $\mathbb{P}^p k$, siendo J un ideal homogéneo de $k[z_{00}, \dots, z_{mn}]$ pongamos generado por los polinomios homogéneos $f_1, \dots, f_r$, entonces

$$S^{-1}(V) = \{(\langle a_0, \dots, a_m \rangle, \langle b_0, \dots, b_n \rangle); f_i(a_0 b_0, \dots, a_m b_n) = 0, \forall i\},$$

esto es, $S^{-1}(V)$ es el conjunto algebraico biproyectivo definido por la familia de polinomios bihomogéneos

$$\{f_i(x_0 y_0, \dots, x_0 y_n, \dots, x_m y_0, \dots, x_m y_n)\}_{1 \leq i \leq r} \subseteq k[x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_n].$$

Luego $S^{-1}(V)$ es cerrado en la topología de Zariski de $\mathbb{P}^m k \times \mathbb{P}^n k$.

(1.7.13) La imagen de $\mathbb{P}^m k \times \mathbb{P}^n k$ por S es

$$S(\mathbb{P}^m k \times \mathbb{P}^n k) = V(z_{ij} z_{kl} - z_{il} z_{kj})_{\substack{0 \leq i, k \leq m \\ 0 \leq j, l \leq n}} = V.$$

En efecto, por definición la imagen de S está contenida en V , y por otra parte, si $\langle c_{00}, \dots, c_{mn} \rangle \in V$, entonces $c_{ij} c_{kl} = c_{il} c_{kj}$ para todo i, j, k y l . Dado que existen i, j tales que $c_{ij} \neq 0$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $c_{ij} = 1$ y por lo tanto $c_{kl} = c_{il} c_{kj}$ para todo k y l . Sean

$$a_k = c_{kj} \quad , \quad b_l = c_{il}$$

para todo k y l . Entonces $a_i = b_j = 1$, con lo que

$$(\langle a_0, \dots, a_m \rangle, \langle b_0, \dots, b_n \rangle) \in \mathbb{P}^m k \times \mathbb{P}^n k$$

y

$$a_k b_l = c_{kj} c_{il} = c_{kl} \quad , \quad \forall k, l,$$

con lo que $S(\langle a_0, \dots, a_m \rangle, \langle b_0, \dots, b_n \rangle) = \langle c_{00}, \dots, c_{mn} \rangle$.

A S se le denomina *inmersión de Serre* de $\mathbb{P}^m k \times \mathbb{P}^n k$ en $\mathbb{P}^{mn+m+n} k$.

(1.7.14) El producto cartesiano de un número finito de conjuntos algebraicos, entre los que puede haber tanto conjuntos algebraicos afines como proyectivos, por (1.7.1) es un subconjunto de $\mathbb{P}^{n_1} k \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} k \times \mathbb{A}^m k$.

(1.7.15) Definición. Sean $m, r \in \mathbb{N}$ y $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}^+$. Un polinomio

$$f \in k[x_{10}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{r0}, \dots, x_{rn_r}, y_1, \dots, y_m]$$

se dice que es $(n_1, \dots, n_r)$ -*multihomogéneo de multigrado* $(p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{N}^r$ si cada monomio de f es de grado total p_i en las variables $x_{i0}, \dots, x_{in_i}$ para cada $i \in \{1, \dots, r\}$.

Todo polinomio $f \in k[x_{10}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{r0}, \dots, x_{rn_r}, y_1, \dots, y_m]$ se puede descomponer de forma única como suma de polinomios $(n_1, \dots, n_r)$ -*multihomogéneos no nulos*, llamados *componentes* $(n_1, \dots, n_r)$ -*multihomogéneas* de f .

(1.7.16) Definición. Si

$$f \in k[x_{10}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{r0}, \dots, x_{rn_r}, y_1, \dots, y_m],$$

se dice que

$$\begin{aligned} p = (\langle a_{10}, \dots, a_{1n_1} \rangle, \dots, \langle a_{r0}, \dots, a_{rn_r} \rangle, b_1, \dots, b_m) \\ \in \mathbb{P}^{n_1}k \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r}k \times \mathbb{A}^m k \end{aligned}$$

es un *cero de f* si

$$f(\lambda_1 a_{10}, \dots, \lambda_1 a_{1n_1}, \dots, \lambda_r a_{r0}, \dots, \lambda_r a_{rn_r}, b_1, \dots, b_m) = 0$$

para todo $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in k \setminus \{0\}$.

Si $S \subseteq k[x_{10}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{r0}, \dots, x_{rn_r}, y_1, \dots, y_m]$, se llama *conjunto algebraico definido por S* , y se denota por $V(S)$ a

$$V(S) = \{p \in \mathbb{P}^{n_1}k \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r}k \times \mathbb{A}^m k; p \text{ es cero de } f; \forall f \in S\}.$$

Si $p \in \mathbb{P}^{n_1}k \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r}k \times \mathbb{A}^m k$ es un cero de f , entonces también es un cero de cada una de las componentes $(n_1, \dots, n_r)$ -multihomogéneas de f .

(1.7.17) Definición. Un ideal

$$I \subseteq k[x_{10}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{r0}, \dots, x_{rn_r}, y_1, \dots, y_m]$$

se dice que es $(n_1, \dots, n_r)$ -*multihomogéneo* si está generado por una familia de polinomios $(n_1, \dots, n_r)$ -multihomogéneos, o equivalentemente, si las componentes $(n_1, \dots, n_r)$ -multihomogéneas de todo elemento f de I también pertenecen a I .

Si

$$V \subseteq \mathbb{P}^{n_1}k \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r}k \times \mathbb{A}^m$$

es el conjunto algebraico definido por

$$S \subseteq k[x_{10}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{r0}, \dots, x_{rn_r}, y_1, \dots, y_m],$$

entonces $V = V(I)$, siendo I el ideal $(n_1, \dots, n_r)$ -multihomogéneo generado por las componentes $(n_1, \dots, n_r)$ -multihomogéneas de todos los polinomios de S .

Como consecuencia de (1.2.4) tenemos:

(1.7.18) Teorema. *Todo ideal $(n_1, \dots, n_r)$ -multihomogéneo*

$$I \subseteq k[x_{10}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{r0}, \dots, x_{rn_r}, y_1, \dots, y_m]$$

está generado por un conjunto finito de polinomios $(n_1, \dots, n_r)$ -multihomogéneos.

Todo conjunto algebraico

$$V \subseteq \mathbb{P}^{n_1} k \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} k \times \mathbb{A}^m$$

está definido por una familia finita de polinomios $(n_1, \dots, n_r)$ -multihomogéneos.

(1.7.19) Definición. Si $V \subseteq \mathbb{P}^{n_1} k \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} k \times \mathbb{A}^m$ es un conjunto algebraico, se denomina *ideal de V* al ideal

$$I(V) = \{f \in k[x_{10}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{r0}, \dots, x_{rn_r}, y_1, \dots, y_m] \\ ; p \text{ es cero de } f, \forall p \in V\}.$$

El ideal $I(V)$ es un ideal $(n_1, \dots, n_r)$ -multihomogéneo del anillo de polinomios $k[x_{10}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{r0}, \dots, x_{rn_r}, y_1, \dots, y_m]$.

(1.7.20) Los conjuntos algebraicos de $\mathbb{P}^{n_1} k \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} k \times \mathbb{A}^m$ constituyen la familia de cerrados de una topología denominada *topología de Zariski de $\mathbb{P}^{n_1} k \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} k \times \mathbb{A}^m$* .

(1.7.21) Definición. Un conjunto algebraico $V \subseteq \mathbb{P}^{n_1} k \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} k \times \mathbb{A}^m$ es irreducible si no es la unión de dos conjuntos algebraicos propios, o sea, si $V = V_1 \cup V_2$, siendo V_1 y V_2 conjuntos algebraicos, entonces o bien $V = V_1$, o bien $V = V_2$.

De manera análoga a (1.6.14), tenemos que

(1.7.22) Proposición. *Un conjunto algebraico V es irreducible si, y sólo si el ideal $I(V)$ es primo.*

(1.7.23) Definición. Una *variedad* es un conjunto U abierto en la topología de Zariski de un conjunto algebraico irreducible

$$V \subseteq \mathbb{P}^{n_1} k \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} k \times \mathbb{A}^m$$

para algunos $m, r \in \mathbb{N}$ y $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}^+$.