

Tema 2

Dimensión

2.1. Dimensión de Krull

(2.1.1) Definición. Sea X un espacio topológico. Se dice que un subconjunto Y de X es una *componente irreducible de X* si Y es un subconjunto irreducible maximal

(2.1.2) Si Y es una componente irreducible, entonces Y es cerrado, pues la clausura de Y es también irreducible y contiene a Y , luego Y coincide con su clausura por maximalidad.

(2.1.3) Proposición. Sea X un espacio topológico.

(2.1.3.1) Todo conjunto irreducible V de X está contenido en una componente irreducible de X .

(2.1.3.2) X es la unión de sus componentes irreducibles.

Demostración. (1) El conjunto $\mathcal{V} = \{Y \subseteq X; Y \text{ irreducible}, V \subseteq Y\}$ es no vacío porque $V \in \mathcal{V}$.

Sea $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots$ una cadena de elementos de $\mathcal{V}$. Entonces $Y = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} Y_i$ contiene a V y si V_1 y V_2 son cerrados tales que $Y \subseteq V_1 \cup V_2$, y suponemos que $Y \not\subseteq V_1$, entonces existe $j \in \mathbb{Z}^+$ tal que $Y_i \not\subseteq V_1$ para todo $j \geq i$. Dado que Y_i es irreducible, tenemos entonces que $Y_i \subseteq V_2$ para todo $i \geq j$, de donde $Y \subseteq V_2$. Luego Y es una cota superior de la cadena $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots$.

En virtud del lema de Zorn, existe un elemento maximal Y de $\mathcal{V}$. Ese subconjunto Y es una componente irreducible de X .

(2) Para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es irreducible, y por (1), x pertenece a una componente irreducible de X . $\square$

(2.1.4) Ejemplo. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ un conjunto algebraico afín, y

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_s$$

su descomposición en irreducibles (ver (1.2.10)). Entonces V_i es un conjunto irreducible maximal para cada i . En efecto, si $V_i \subseteq V'$ y V' es un conjunto irreducible, entonces la clausura $\overline{V'}$ es un cerrado irreducible contenido en V y

$$V_1 \cup \cdots \cup V_{i-1} \cup \overline{V'} \cup V_{i+1} \cup \cdots \cup V_s = V.$$

Además $\overline{V'} \not\subseteq V_j$ para $j \neq i$, porque en caso contrario $V_i \subseteq V_j$. Por la unicidad de la descomposición en irreducibles, desechando en la unión anterior las redundancias, tenemos que $V_i = V'$, y por lo tanto V_i es irreducible maximal. Recíprocamente, si V' es un irreducible maximal de V , entonces $V' \subseteq V_i$ para algún i , dado que $V' \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_s$. Por maximalidad, $V' = V_i$, así que los irreducibles maximales de V son las componentes irreducibles (en el sentido de (1.2.10)) en las que se descompone V .

(2.1.5) Definición. Sea X un espacio topológico no vacío. Se define la *dimensión de Krull de X* como el supremo $\dim X$ de las longitudes n de todas las cadenas

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n,$$

con $X_i \neq X_{i+1}$, de subconjuntos cerrados irreducibles X_i de X .

Si $\emptyset \neq Y \subseteq X$ es un cerrado irreducible, se define la *codimensión de Y en X* como el supremo $\text{codim}_X Y$ de las longitudes n de todas las cadenas

$$Y = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n,$$

con $X_i \neq X_{i+1}$, de subconjuntos cerrados irreducibles de X .

Si A es un cerrado (no necesariamente irreducible) de X , se define la *codimensión de A en X* , y se denota por $\text{codim}_X A$, como el ínfimo de las codimensiones de las componentes irreducibles de A .

Se conviene en que el subconjunto vacío de X tiene dimensión -1 y codimensión ∞ .

(2.1.6) Proposición. Sea X un espacio topológico no vacío.

(2.1.6.1) Si $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es la familia de las componentes irreducibles de X , entonces $\dim X = \sup_{\lambda \in \Lambda} \dim X_\lambda$;

(2.1.6.2) si $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, con A_i cerrado para cada i , entonces $\dim X = \sup_i \dim A_i$;

(2.1.6.3) si $\emptyset \neq Y \subseteq X$ es un cerrado irreducible, entonces

$$\dim Y + \text{codim}_X Y \leq \dim X;$$

(2.1.6.4) si $Y \subseteq X$ son irreducibles, Y cerrado y $\dim X < \infty$, entonces $\dim Y < \dim X$ si, y sólo si $Y \neq X$.

Demostración. (1) Por definición $\dim X \geq \sup_{\lambda \in \Lambda} \dim X_\lambda$, y por otra parte, para toda cadena estrictamente creciente de irreducibles

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n$$

existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $X_n \subseteq X_\lambda$, luego $\dim X_\lambda \geq n$.

(2) $\dim A_i \leq \dim X$, dado que $A_i \subseteq X$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Si V es un cerrado irreducible en X , entonces $V \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$, y por lo tanto $V \subseteq A_i$ para algún i . Luego para toda cadena $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n$ de cerrados irreducibles de X existe $1 \leq i \leq n$ tal que A_i la contiene.

(3) Si $\emptyset \neq Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_n$ es una cadena de cerrados irreducibles de Y y $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_m$ es una cadena de cerrados irreducibles con $X_0 = Y$, entonces

$$\emptyset \neq Y_0 \subset \cdots \subset Y_n \subset X_1 \subset \cdots \subset X_m$$

es una cadena de cerrados irreducibles de X de longitud $n+m$, luego $\dim X \geq n+m$ para todo $n \leq \dim Y$ y todo $m \leq \operatorname{codim}_X Y$.

(4) Si $Y = X$ entonces $\dim Y = \dim X$.

Supongamos ahora que $\dim Y = \dim X = n$ e $Y \neq X$, entonces existe una cadena $\emptyset \neq Y_0 \subset \cdots \subset Y_n$ de cerrados irreducibles de Y distintos entre sí. La cadena

$$\emptyset \neq Y_0 \subset \cdots \subset Y_n \subset X$$

es de cerrados irreducibles de X distintos entre sí, así que $\dim X \geq n+1$ — una contradicción. Luego si $\dim Y = \dim X = n$ entonces $Y = X$. $\square$

(2.1.7) Definición. Sea A un anillo. Se llama *dimensión de Krull de A* a la dimensión del espacio topológico $\operatorname{Spec} A$.

(2.1.8) Si $A \neq \{0\}$, la dimensión de Krull de A coincide con el supremo de las longitudes n de las cadenas de ideales primos

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$$

de A .

Si $A = \{0\}$, entonces la dimensión de A es -1 .

(2.1.9) Definición. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo del anillo A , se llama *altura de $\mathfrak{p}$* , y se denota por $h(\mathfrak{p})$ al supremo de las longitudes n de las cadenas de ideales primos

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$$

con $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$.

Si I es un ideal propio de A , se llama *altura de I* , y se denota por $h(I)$ al ínfimo de las alturas de los divisores primos de I .

Se llama *dimensión*, o *coaltura de I* a la dimensión de Krull del anillo cociente A/I , esto es, al supremo de las longitudes n de las cadenas de ideales primos distintos $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ que contienen a I .

(2.1.10) Dado que un cerrado V de $\mathbf{Spec}A$ es irreducible si, y sólo si $I(V)$ es un ideal primo y $I(V(I)) = \text{Rad}I$ para cada ideal I de A , tenemos que la dimensión (o coaltura) de un ideal primo $\mathfrak{p}$ es la dimensión del cerrado irreducible $V(\mathfrak{p})$ de $\mathbf{Spec}A$, y la altura de $\mathfrak{p}$ coincide con $\text{codim}_{\mathbf{Spec}A} V(\mathfrak{p})$.

En efecto, si $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ es una cadena de ideales primos distintos que contienen a $\mathfrak{p}$ (resp., con $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n$), entonces

$$V(\mathfrak{p}_n) \subset V(\mathfrak{p}_{n-1}) \subset \cdots \subset V(\mathfrak{p}_0)$$

es una cadena de cerrados irreducibles (no vacíos porque $\mathfrak{p}_n \neq A$) contenidos en $V(\mathfrak{p})$ (resp., tales que $V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{p}_n)$, luego $\dim \mathfrak{p} \leq \dim V(\mathfrak{p})$ (resp., $h(\mathfrak{p}) \leq \text{codim}_{\mathbf{Spec}A} V(\mathfrak{p})$).

Recíprocamente, si $Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_n$ es una cadena de cerrados irreducibles no vacíos y distintos contenidos en $V(\mathfrak{p})$ (resp., con $V(\mathfrak{p}) = Y_0$), entonces

$$I(Y_n) \subset I(Y_{n-1}) \subset \cdots \subset I(Y_0)$$

es una cadena de ideales primos distintos que contienen a $\mathfrak{p}$ (resp., tales que $I(Y_0) = I(V(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$), de donde se obtiene la otra desigualdad.

(2.1.11) Definición. Sea G un anillo positivamente graduado. Se llama *g-dimensión de G* , y se denota $g\text{-dim}G$ a la dimensión del espectro homogéneo $\mathbf{Proj}G$.

(2.1.12) Si $\mathbf{Proj}G$ es no vacío, la g-dimensión de G coincide con el supremo de las longitudes n de las cadenas de ideales primos homogéneos distintos

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$$

que no contienen a G_+ .

(2.1.13) Sea k algebraicamente cerrado. Si $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ es una variedad afín, entonces la dimensión de V coincide con la dimensión de Krull del anillo de coordenadas $k[V]$.

De manera similar, si $V \subseteq \mathbb{P}^n k$ es una variedad proyectiva, entonces la dimensión de V es la g-dimensión del anillo (positivamente graduado) de coordenadas $k[V]$.

Si $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ es una variedad afín, entonces teniendo en cuenta que un conjunto algebraico afín es irreducible si, y sólo si su clausura proyectiva lo es, podemos afirmar que la dimensión de V es menor o igual que la de su clausura proyectiva V^* .

(2.1.14) Ejemplo. Sea $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Dado que

$$(0) \subset (x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \dots \subset (x_1, \dots, x_n)$$

es una cadena de ideales primos distintos, la dimensión de Krull de A es mayor o igual que n .

Si G es el anillo positivamente graduado $k[x_0, \dots, x_n]$, entonces

$$(0) \subset (x_0) \subset (x_0, x_1) \subset \dots \subset (x_0, \dots, x_{n-1})$$

es una cadena de ideales primos homogéneos distintos que no contienen a $G_+ = (x_0, \dots, x_n)$, luego la g-dimensión de G es mayor o igual que n .

(2.1.15) Ejemplo. Sea A un dominio de factorización única. Los ideales primos de altura 1 son exactamente los ideales principales generados por un elemento primo.

En efecto, si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de altura 1, entonces $\mathfrak{p} \neq 0$ y existe un elemento $r \neq 0$ en $\mathfrak{p}$. Dado que $\mathfrak{p}$ es primo, si $r = y_1 \cdots y_n$ es la descomposición de r en irreducibles, entonces alguno de ellos, pongamos y_1 , pertenece a $\mathfrak{p}$. Luego $(y_1) \subseteq \mathfrak{p}$, y como la altura de $\mathfrak{p}$ es 1, se tiene que $\mathfrak{p} = (y_1)$.

Recíprocamente, si x es un elemento primo de A y $\mathfrak{p} \neq (0)$ es un ideal primo contenido en (x) , entonces existe un elemento irreducible $0 \neq y \in \mathfrak{p}$. Dado que x divide a y e y es irreducible, existe un elemento inversible a de A tal que $y = ax$, o sea, $x = a^{-1}y$, y por lo tanto $x \in \mathfrak{p}$, de donde se tiene que $\mathfrak{p} = (x)$.

En particular, los dominios de ideales principales que no son cuerpos, como por ejemplo $\mathbb{Z}$ y $k[x]$, tienen dimensión de Krull 1.

Por otra parte, las hipersuperficies afines y proyectivas tienen codimensión 1.

(2.1.16) Proposición. Sea A un anillo con un número finito de ideales primos minimales y en el que el cero es un ideal radical. Entonces la dimensión de A es cero si y sólo si A es el producto de un número finito de cuerpos.

Demostración. Sean $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ los ideales primos minimales de A . Como la dimensión de A es cero, $\mathfrak{p}_i$ es un ideal maximal para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por el teorema chino de los restos, el homomorfismo de anillos

$$A \longrightarrow A/\mathfrak{p}_1 \times \dots \times A/\mathfrak{p}_n; \quad a \longmapsto (a + \mathfrak{p}_1, \dots, a + \mathfrak{p}_n)$$

es un epimorfismo y su núcleo es $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i = \text{Rad} 0 = 0$. Dado que $\mathfrak{p}_i$ es un ideal maximal para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, A es isomorfo al producto de cuerpos $A/\mathfrak{p}_1 \times \dots \times A/\mathfrak{p}_n$.

Recíprocamente, si $A \cong k_1 \times \dots \times k_n$, entonces los únicos elementos del espectro de A son los ideales que se corresponden mediante el isomorfismo con $k_1 \times \dots \times k_{i-1} \times 0 \times k_{i+1} \times \dots \times k_n$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Dado que estos ideales son maximales y de altura cero, la dimensión de A es cero. $\square$