Dimensión

2.3. Dimensión de una variedad afín

(2.3.1) Lema. *Sea $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio no constante. Sustituyendo x_i en f*

(2.3.1.1) *o bien por $y_i + x_n^{r_i}$, con los $r_i \in \mathbb{N}$ apropiados,*

(2.3.1.2) *o bien por $y_i + a_i x_n$, con $a_i \in k$, si k es infinito,*

para $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, se obtiene un polinomio

$$g(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n) = a x_n^m + g_1 x_n^{m-1} + \cdots + g_{m-1} x_n + g_m,$$

con $m > 0$, $a \in k \backslash \{0\}$ y $g_i \in k[y_1, \ldots, y_{n-1}]$ para cada i.

Demostración. Sea

$$f = \sum_{j_1, \ldots, j_n} a_{j_1 \ldots j_n} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}.$$

En el primer caso, para cada $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$, la sustitución

$$x_i = y_i + x_n^{r_i}$$

en el monomio $a_{j_1 \ldots j_n} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$ tiene como monomio de mayor grado en x_n a

$$a_{j_1 \ldots j_n} x_n^{j_n + j_1 r_1 + \cdots + j_{n-1} r_{n-1}}.$$

Si elegimos $r_i = (l+1)^i$, donde

$$l = \max\{j; \exists j_1, \ldots, j_n, a_{j_1 \ldots j_n} \neq 0, j \in \{j_1, \ldots, j_n\}\},$$

tenemos que si $(j_1, \ldots, j_n) \neq (k_1, \ldots, k_n)$, entonces

$$j_n + r_1 j_1 + \cdots + r_{n-1} j_{n-1} \neq k_n + k_1 r_1 + \cdots + k_{n-1} r_{n-1}.$$

En efecto, si $j_{n-1} \neq k_{n-1}$, pongamos porque $j_{n-1} < k_{n-1}$, entonces

$$\begin{aligned} j_n + j_1 r_1 + \cdots + j_{n-2} r_{n-2} &\leq l(1 + (l+1) + \cdots + (l+1)^{n-2}) \\ &= l \frac{(l+1)^{n-1} - 1}{(l+1) - 1} < (l+1)^{n-1}, \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} & j_n + j_1 r_1 + \cdots + j_{n-2} r_{n-2} + j_{n-1} r_{n-1} \\ & < (1 + j_{n-1})(l+1)^{n-1} \\ & \leq k_{n-1}(l+1)^{n-1} \\ & \leq k_n + k_1 r_1 + \cdots + k_{n-2} r_{n-2} + k_{n-1} r_{n-1}. \end{aligned}$$

si por el contrario $j_{n-1} = k_{n-1}$, entonces o bien $j_{n-2} \neq k_{n-2}$ y por un razonamiento similar

$$j_n + r_1 j_1 + \cdots + r_{n-2} j_{n-2} \neq k_n + k_1 r_1 + \cdots + k_{n-2} r_{n-2},$$

lo que implica

$$j_n + r_1 j_1 + \cdots + r_{n-1} j_{n-1} \neq k_n + k_1 r_1 + \cdots + k_{n-1} r_{n-1},$$

o bien $j_{n-2} = k_{n-2}$. Repitiendo este razonamiento hasta encontrar s tal que $j_s \neq k_s$ tenemos la desigualdad.
Luego los términos de mayor grado en x_n que resultan al transformar los monomios no nulos de f no se cancelan entre sí, así que el término de mayor grado en x_n es de la forma

$$a_{j_1 \ldots j_n} x_n^m,$$

con $m = j_n + j_1 r_1 + \ldots + j_{n-1} r_{n-1}$, para cierto $(j_1, \ldots, j_n)$ tal que $a_{j_1 \ldots j_n} \neq 0$.
En el segundo caso, si $f = \sum_{k=0}^m f_k$ es la descomposición de f como suma de sus componentes homogéneas ($f_m \neq 0$) y se sustituye $x_i = y_i + a_i x_n$ para $1 \leq i \leq n-1$, entonces el término de mayor grado en x_n es

$$f_m(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1) x_n^m.$$

Como $f_m \neq 0$, el polinomio

$$p = f_m(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \in k[x_1, \ldots x_{n-1}]$$

es también no nulo, y como k es infinito, existe $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{A}^{n-1}k$ tal que $p(a_1, \ldots, a_{n-1}) \neq 0$. $\square$

(2.3.2) Definición. Se dice que un anillo A es una k–*álgebra* si el cuerpo k es un subanillo de A. Si además A es finitamente generado como anillo sobre k, entonces se dice que A es una k–álgebra *afín*.

(2.3.3) Nota. Las k–álgebras afines son exactamente los anillos cociente de anillos de polinomios.
En efecto, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y todo ideal propio I de $k[x_1, \ldots, x_n]$, el anillo cociente

$$k[x_1, \ldots, x_n]/I$$

es una k–álgebra generada por $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$, y recíprocamente, si A es una k–álgebra generada por $a_1, \ldots, a_n$ como anillo sobre k, entonces

$$A \cong k[x_1, \ldots, x_n]/I,$$

siendo I el núcleo del epimorfismo de anillos

$$k[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow A; \quad f \longmapsto f(a_1, \ldots, a_n).$$

(2.3.4) Definición. Sea A una k–álgebra. Se dice que la familia de elementos $a_1, \ldots, a_d \in A$ es *algebraicamente independiente sobre* k si el único polinomio $f \in k[x_1, \ldots, x_d]$ tal que $f(a_1, \ldots, a_d) = 0$ es $f = 0$.
Si $k \hookrightarrow K$ es una extensión de cuerpos, se llama *grado de trascendencia de* K *sobre* k al supremo

$$\sup\{n \in \mathbb{N}; \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \text{ algebraicamente independientes sobre } k\}.$$

(2.3.5) Teorema. (de normalización de Noether). *Sea A una k–álgebra afín e I un ideal propio de A. Existen números naturales $\delta \leq d$ y elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in A$ tales que*

(2.3.5.1) *$\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ son algebraicamente independientes sobre k;*

(2.3.5.2) *A es finitamente generado como $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$–módulo;*

(2.3.5.3) $I \cap k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d] = (\alpha_{\delta+1}, \ldots, \alpha_d)$.

Si k es infinito y $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, entonces además

(2.3.5.4) $\alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ *con $a_{ij} \in k$, para cada $i \in \{1, \ldots, \delta\}$.*

Demostración. **1er caso.** Consideremos primero el caso en que A es el anillo de polinomios $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ y el ideal $I \neq A$ es principal, o sea, existe $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $f \notin k$ tal que $I = (f)$.
Sea $y_n = f$ e y_i como en el lema (2.3.1) para $1 \leq i \leq n-1$ (o sea, o bien $y_i = x_i - x_n^{r_i}$, o bien $y_i = x_i - a_i x_n$ cuando k es infinito). Luego

$$f = a x_n^m + g_1(y_1, \ldots, y_{n-1}) x_n^{m-1} + \cdots + g_m(y_1, \ldots, y_{n-1})$$

con $a \in k$, $a \neq 0$, y por lo tanto

$$0 = f - y_n = ax_n^m + g_1(y_1, \ldots, y_{n-1})x_n^{m-1} + \cdots + g_m(y_1, \ldots, y_{n-1}) - y_n,$$

de donde se tiene que x_n es entero sobre $k[y_1, \ldots, y_n]$.
Luego $A = k[y_1, \ldots, y_n][x_n]$ es finitamente generado como $k[y_1, \ldots, y_n]$–módulo.
Por otra parte, si $y_1, \ldots, y_n$ fuesen algebraicamente dependientes, entonces existe un polinomio $0 \neq g \in k[t_1, \ldots, t_n]$ tal que $g(y_1, \ldots, y_n) = 0$. Después de sustituir y_i en g, tenemos un polinomio no nulo que se anula en $x_1, \ldots, x_n$, lo que contradice que $x_1, \ldots, x_n$ son algebraicamente independientes sobre k.
Luego $y_1, \ldots, y_n$ son algebraicamente independientes sobre k.
Además, si $g \in I \cap k[y_1, \ldots, y_n]$, entonces $g = hy_n$, con $h \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Como $k[x_1, \ldots, x_n]$ es finitamente generado como $k[y_1, \ldots, y_n]$–módulo, existen $a_1, \ldots a_s \in k[y_1, \ldots, y_n]$ tales que

$$h^s + a_1 h^{s-1} + \cdots + a_s = 0.$$

Multiplicando por y_n^s, tenemos

$$g^s = -y_n(a_1 g^{s-1} + \cdots + y_n^{s-2} a_s),$$

y de ahí que y_n divide a g^s en $k[y_1, \ldots, y_n]$. Dado que

$$k[t_1, \ldots, t_n] \longrightarrow k[y_1, \ldots, y_n]; \; t_i \longmapsto y_i$$

es un isomorfismo, y_n es irreducible, y por lo tanto y_n divide a g.

2^o caso. Supongamos ahora que I es un ideal propio arbitrario de $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Si $I = (0)$, el enunciado es trivialmente cierto. Sea $I \neq (0)$ y $f \in I$, $f \neq 0$. Luego $f \notin k$.
Inducción sobre n.
Si $n = 1$, entonces I es principal y estamos en el caso anterior.
Sea $n > 1$ y supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$. Si llamamos y_i a $x_i - x_n^{r_i}$ o bien a $x_i - a_i x_n$ para $1 \leq i \leq n - 1$ de tal manera que

$$f = ax_n^m + g_1(y_1, \ldots, y_{n-1})x_n^{m-1} + \cdots + g(y_1, \ldots, y_{m-1})$$

con $a \in k$ e $y_n = f$, de la misma manera que en el caso anterior $k[y_1, \ldots, y_{n-1}]$ es el anillo de polinomios en $n - 1$ variables. Luego para el ideal propio $I \cap k[y_1, \ldots, y_{n-1}]$ existen

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1} \in k[y_1, \ldots, y_{n-1}]$$

algebraicamente independientes sobre k tales que $k[y_1, \ldots, y_{n-1}]$ es finitamente generado como $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}]$–módulo e

$$I \cap k[\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}] = (\alpha_{\delta+1}, \ldots, \alpha_{d-1})$$

para cierto $\delta \leq d$. Además, si k es infinito $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} y_j$ para $1 \leq i \leq \delta$.
Como $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ es finitamente generado como $k[y_1, \ldots, y_n]$–módulo y $k[y_1, \ldots, y_n]$ es un $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}, y_n]$–módulo finitamente generado, tenemos que A es infinitamente generado como $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}, y_n]$–módulo. Luego $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}, y_n$ son algebraicamente independientes sobre k.
Además, si k es infinito, entonces $\alpha_1, \ldots, \alpha_\delta$ son combinación lineal de los elementos $y_1, \ldots, y_{n-1}$, y estos a su vez son combinación lineal de $x_1, \ldots, x_n$.
Si $g \in I \cap k[\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}, y_n]$, entonces $g = g^* + hy_n$, con

$$g^* \in I \cap k[\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}] = (\alpha_{\delta+1}, \ldots, \alpha_{d-1}$$

y

$$h \in k[\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}, y_n],$$

luego

$$g \in (\alpha_{\delta+1}, \ldots, \alpha_{d-1}, y_n).$$

3er caso. Si A es una k–álgebra afín entonces $A = k[x_1, \ldots, x_n]/J$ para cierto ideal J de $k[x_1, \ldots, x_n]$.
Aplicando el caso anterior al ideal J, existen $y_1, \ldots, y_d$ algebraicamente independientes sobre k tales que $k[x_1, \ldots, x_n]$ es finitamente generado como $k[y_1, \ldots, y_d]$–módulo,

$$J \cap k[y_1, \ldots, y_d] = (y_{\delta+1}, \ldots, y_d) \subseteq k[y_1, \ldots, y_d]$$

y si k es infinito, $y_1, \ldots, y_\delta$ son combinación lineal de $x_1, \ldots, x_n$.
El anillo $k[y_1, \ldots, y_d]/J \cap k[y_1, \ldots, y_d]$ es un subanillo de $A = k[x_1, \ldots, x_n]/J$ y A es finitamente generado como $k[y_1, \ldots, y_d]/J \cap k[y_1, \ldots, y_d]$–módulo.
Además, $k[y_1, \ldots, y_d]/J \cap k[y_1, \ldots, y_d]$ es isomorfo a $k[y_1, \ldots, y_\delta]$ puesto que

$$J \cap k[y_1, \ldots, y_d] = (y_{\delta+1}, \ldots, y_d),$$

y $k[y_1, \ldots, y_\delta]$ es isomorfo al anillo de polinomios en δ variables por ser $y_1, \ldots, y_\delta$ algebraicamente independientes sobre k.
Aplicando el segundo caso al ideal propio

$$I' = I \cap k[y_1, \ldots, y_\delta]$$

de $k[y_1, \ldots, y_\delta]$ existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d'}$ algebraicamente independientes sobre k tales que $k[y_1, \ldots, y_\delta]$ (y por tanto A por ser $k[y_1, \ldots, y_\delta]$–módulo finitamente generado) es un $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_{d'}]$–módulo finitamente generado e

$$I' \cap k[\alpha_1, \ldots, \alpha_{d'}] = (\alpha_{\delta'+1}, \ldots, \alpha_{d'}) \subseteq k[\alpha_1, \ldots, \alpha_{d'}]$$

para cierto $\delta' \leq d'$.
Luego

$$I \cap k[\alpha_1, \ldots, \alpha_{d'}] = I' \cap k[\alpha_1, \ldots, \alpha_{d'}] = (\alpha_{\delta'+1}, \ldots, \alpha_{d'}) \; .$$

□

(2.3.6) Definición. Si $A \neq \{0\}$ es una k–álgebra afín, $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d] \subseteq A$ es una *normalización de Noether de* A si $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ son algebraicamente independientes sobre k y A es un $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$–módulo finitamente generado.

(2.3.7) Nota. Si A es el anillo de polinomios en n variables y $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ es una normalización de Noether de A, entonces $d = n$, porque $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ es isomorfo al anillo de polinomios en d variables por ser $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ algebraicamente independientes sobre k.

(2.3.8) Definición. Se dice que una cadena de ideales primos del anillo A es *maximal* si no existe ninguna otra cadena que contenga a la primera y cuya longitud sea mayor.

(2.3.9) Proposición. *Si A es una k–álgebra afín no nula y*

$$k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d] \subseteq A$$

es una normalización de Noether de A, entonces la dimensión de Krull de A es d.
Además, si A es un dominio de integridad, entonces toda cadena maximal de ideales primos de A tiene longitud d.

Demostración. Dado que A es entero sobre $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ (pues es finitamente generado como módulo) y $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ es isomorfo al anillo de polinomios en d variables (por ser $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ algebraicamente independientes sobre k), tenemos que

$$\dim A = \dim k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d] \geq d.$$

Recíprocamente, veamos por inducción sobre d que $\dim A \leq d$.
Para $d = 0$ tenemos que $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d] = k$ y no hay nada que probar.

Sea $d > 0$ y supongamos que el enunciado es cierto en anillos de polinomios en un número de variables menor que d.

Sea $\mathfrak{q}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_m$ una cadena de primos distintos en A y $\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$ la correspondiente cadena de primos (también distintos) en $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ donde $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ para cada i.

Si $m = 0$, entonces $m \leq d$. Sea entonces $m \neq 0$.

Aplicando (2.3.5) al ideal (propio) $\mathfrak{p}_1 \neq (0)$ de $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ existen $\beta_1, \ldots, \beta_d$ algebraicamente independientes sobre k tales que $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ es finitamente generado como $k[\beta_1, \ldots, \beta_d]$–módulo y

$$\mathfrak{p}_1 \cap k[\beta_1, \ldots, \beta_d] = (\beta_{\delta+1}, \ldots, \beta_d) \subseteq k[\beta_1, \ldots, \beta_d].$$

Como $\mathfrak{p}_1 \neq (0)$, tenemos que $\delta < d$, pues si $\delta = d$ entonces

$$\mathfrak{p}_1 \cap k[\beta_1, \ldots, \beta_d] = (0),$$

y como $k[\alpha_1, \ldots \alpha_d]$ es entero sobre $k[\beta_1, \ldots \beta_d]$ y (0) es un ideal primo de $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ sería $\mathfrak{p}_1 = (0)$.

Luego $k[\beta_1, \ldots, \beta_\delta]$ es isomorfo al subanillo

$$k[\beta_1, \ldots, \beta_d]/\mathfrak{p}_1 \cap k[\beta_1, \ldots, \beta_d]$$

de $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]/\mathfrak{p}_1$ y por lo tanto $k[\beta_1, \ldots, \beta_\delta]$ es una normalización de Noether de $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]/\mathfrak{p}_1$.

Aplicando la hipótesis de inducción a la cadena de longitud $m - 1$

$$(0) = \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m/\mathfrak{p}_1$$

de primos de $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]/\mathfrak{p}_1$ se tiene que $m-1 \leq \delta < d$, y de ahí que $m \leq d$.

Si A es un dominio de integridad y $\mathfrak{q}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_m$ es una cadena maximal de primos de A, entonces $\mathfrak{q}_0 = (0)$ y $\mathfrak{q}_m$ es un ideal maximal de A. La cadena $(0) = \mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$ también es una cadena maximal en $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$.

En efecto, supongamos que existe un ideal primo $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_{i+1}$ para algún $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ y sea $k[\beta_1, \ldots, \beta_d]$ una normalización de Noether de $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ tal que

$$\mathfrak{p}_i \cap k[\beta_1, \ldots, \beta_d] = (\beta_{\delta+1}, \ldots, \beta_d).$$

Entonces $k[\beta_1, \ldots, \beta_\delta]$, que es isomorfo al subanillo

$$k[\beta_1, \ldots, \beta_n]/\mathfrak{p}_i \cap k[\beta_1, \ldots, \beta_n]$$

de $[\alpha_1,\dots,\alpha_d]/\mathfrak{p}_i$, es una normalización de Noether de $k[\alpha_1,\dots,\alpha_d]/\mathfrak{p}_i$. Como los ideales primos

$$(0)\subset \mathfrak{p}/\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_{i+1}/\mathfrak{p}_i$$

son distintos y $k[\alpha_1,\dots,\alpha_d]/\mathfrak{p}_i$ es entero sobre $k[\beta_1,\dots,\beta_\delta]$, los ideales primos de $k[\beta_1,\dots,\beta_\delta]$

$$(0)\subset (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_i)\cap k[\beta_1,\dots,\beta_\delta] \subset (\mathfrak{p}_{i+1}/\mathfrak{p}_i)\cap k[\beta_1,\dots,\beta_\delta]$$

son distintos.

Pero $k[\beta_1,\dots,\beta_\delta]$ es íntegramente cerrado (por ser dominio de factorización única) y además es una normalización de Noether de $A/\mathfrak{q}_i$, luego $A/\mathfrak{q}_i$ es entero sobre $k[\beta_1,\dots,\beta_\delta]$ y por el teorema del descenso existe un ideal primo $\mathfrak{q}$ entre (0) y $\mathfrak{q}_{i+1}/\mathfrak{q}_i$, lo que contradice la maximalidad de la cadena

$$\mathfrak{q}_0\subset\cdots\subset\mathfrak{q}_m.$$

Luego $\mathfrak{p}_0\subset\cdots\subset\mathfrak{p}_m$ es maximal.

Veamos que $m=d$ por inducción sobre d.

Si $d=0$, entonces $k[\alpha_1,\dots,\alpha_d]=k$ y trivialmente $m=0$.

Si es cierto para los anillos de polinomios en menos de d variables, elijamos una normalización de Noether $k[\beta_1,\dots,\beta_d]$ de $k[\alpha_1,\dots,\alpha_d]$ tal que

$$\mathfrak{p}_1\cap k[\beta_1,\dots,\beta_d]=(\beta_{\delta+1},\dots,\beta_d).$$

Como $k[\alpha_1,\dots,\alpha_d]$ es entero sobre el anillo íntegramente cerrado $k[\beta_1,\dots,\beta_d]$ y $h(\mathfrak{p}_1)=1$, tenemos que $h(\beta_{\delta+1},\dots,\beta_d)=1$. Por lo tanto $\delta=d-1$, y la cadena

$$\mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1\subset\cdots\subset\mathfrak{p}_m/\mathfrak{p}_1$$

es una cadena maximal de longitud $m-1$ en $k[\alpha_1,\dots,\alpha_d]/\mathfrak{p}_1$, y $k[\beta_1,\dots,\beta_{d-1}]$ es una normalización de Noether de $(k[\beta_1,\dots,\beta_d]/\mathfrak{p}_1\cap k[\beta_1,\dots,\beta_d]$ y por lo tanto de) $k[\alpha_1,\dots,\alpha_d]/\mathfrak{p}_1$. Por la hipótesis de inducción $m-1=d-1$, y de ahí $m=d$. □

(2.3.10) Ejemplo. La dimensión de todo anillo finitamente generado (como anillo) sobre el cuerpo k, (esto es, de toda k–álgebra afín) es finita. En particular la dimensión del anillo de polinomios en n variables es n.

(2.3.11) Corolario. *Sean $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}$ ideales primos distintos de una k–álgebra afín A. Entonces todas las cadenas que empiezan en $\mathfrak{p}$ y terminan en $\mathfrak{q}$ maximales tiene la misma longitud.*

Demostración. Sea

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m = \mathfrak{q}$$

una cadena como las del enunciado.
Entonces la cadena

$$(0) = \mathfrak{p}_0/\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p} \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m/\mathfrak{p}$$

del dominio de integridad $B = A/\mathfrak{p}$, que también es una k–álgebra afín y por tanto de dimensión de Krull finita, se puede extender hasta obtener una cadena maximal

$$(0) = \mathfrak{p}_0/\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p} \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m/\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_{m+1}/\mathfrak{p} \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_{m+r}/\mathfrak{p}$$

cuya longitud es $r + m = \dim A/\mathfrak{p}$.
La cadena

$$(0) = \mathfrak{p}_m/\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}_{m+1}/\mathfrak{q} \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_{m+r}/\mathfrak{q}$$

es una cadena maximal de la k–álgebra afín y dominio de integridad $C = A/\mathfrak{q}$, así que $r = \dim A/\mathfrak{q}$, con lo que

$$m = \dim A/\mathfrak{p} - \dim A/\mathfrak{q}.$$

$\square$

(2.3.12) Definición. Si en un anillo A para cada par de ideales primos $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ todas las cadenas maximales que empiezan en $\mathfrak{p}$ y terminan en $\mathfrak{q}$ tienen la misma longitud, se dice que A es un *anillo de cadena.*

(2.3.13) Definición. Sea $k \hookrightarrow K$ una extensión de cuerpos. Un conjunto $S \subseteq K$ se dice que es *de trascendencia sobre* k si cualquier parte finita de S es algebraicamente independiente sobre k.

(2.3.14) Lema. *Sea $k \hookrightarrow K$ una extensión de cuerpos, $S \subseteq K$ un conjunto de trascendencia y $\alpha \in K$. Entonces $S' = S \cup \{\alpha\}$ es de trascendencia sobre k si, y sólo si α es trascendente sobre $k(S)$.*

Demostración. Sea α trascendente sobre $k(S)$ y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq S'$.
Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq S$, entonces $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son algebraicamante independientes.
Si por el contrario $\{\alpha_1 \ldots, \alpha_{n-1}\} \subseteq S$, $\alpha_n = \alpha$ y

$$g = \sum_{j_1,\ldots,j_n=0}^{m} a_{j_1\ldots j_n} t_1^{j_1} \cdots t_n^{j_n}$$

es tal que $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$, entonces

$$\sum_{i=0}^{m} g_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})\alpha_n^i = 0,$$

donde $g_i = \sum_{j_n=i} a_{j_1 \cdots j_n} t_1^{j_1} \cdots t_{n-1}^{j_{n-1}}$ para $0 \leq i \leq m$. Luego

$$g_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = 0$$

para cada i, y como $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ son algebraicamente independientes, $g_i = 0$ para cada i, con lo que $g = 0$.
Recíprocamente, si S' es de trascendencia y

$$g(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in k(S)[x]$$

es tal que $g(\alpha) = 0$, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$ tales que

$$a_i = f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)/h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

para $0 \leq i \leq m$. Luego

$$0 = h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)g(\alpha) = \sum_{i=0}^{m} f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\alpha^i,$$

y por ser S' de trascendencia, $hg = 0$, de donde $g = 0$ por ser $h \neq 0$. □

(2.3.15) Definición. Un subconjunto S de K se dice que es una *base de trascendencia sobre* k si S es un conjunto de trascendencia sobre k maximal.

(2.3.16) Un conjunto $S \subseteq K$ de trascendencia sobre k es una base de trascendencia si, y sólo si, K es algebraico sobre $k(S)$. En efecto, S es maximal si, y sólo si para cualquier otro elemento $\alpha \in K$, $S \cup \{\alpha\}$ no es de trascendencia, y en virtud del lema anterior, esto ocurre solamente cuando todo elemento $\alpha \in K$ es algebraico sobre $k(S)$.
Si $S \subseteq K \hookleftarrow k$, denotemos por $s(S)$ a la expansión de S en K, esto es, a la clausura íntegra de $k(S)$ en K.

(2.3.17) Proposición. *Sea $k \hookrightarrow K$ una extensión de cuerpos.*

(2.3.17.1) *Si $S \subseteq S' \subseteq K$, entonces $s(S) \subseteq s(S')$;*

(2.3.17.2) *si $\alpha \in s(S)$, entonces existe $F \subseteq S$, F finito tal que $\alpha \in s(F)$;*

(2.3.17.3) *$S \subseteq s(S)$ para todo $S \subseteq K$;*

(2.3.17.4) *$s(s(S)) = s(S)$ para todo $S \subseteq K$;*

(2.3.17.5) *si $\beta \in s(S \cup \{\alpha\})$ y $\beta \notin s(S)$, entonces $\alpha \in s(S \cup \{\beta\})$.*

Demostración. Similar a la de los resultados análogos para espacios vectoriales. □

(2.3.18) Teorema. *Sea $k \hookrightarrow K$ una extensión de cuerpos. Si $S \subseteq K$ es un conjunto de trascendencia sobre k y $S' \subseteq K$ es tal que K es algebraico sobre $k(S')$, entonces existe una base de trascendencia L'' sobre k tal que $S \subseteq S'' \subseteq S'$.*

(2.3.19) Teorema. *Si $k \hookrightarrow K$ es una extensión de cuerpos con grado de trascendencia finito, entonces todas las bases de trascendencia sobre k tienen el mismo cardinal, y este coincide con el grado de trascendencia.*

Demostración. Dado que toda parte finita de una base de trascendencia es un conjunto de elementos algebraicamente independientes sobre k, podemos asegurar que el cardinal de toda base de trascendencia es mayorado por

$$n = \text{tr deg}\,_k K = \sup\{s; \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in K \text{ algebraicamente independientes }\}.$$

Sean $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_c\}$ y $B' = \{\beta_1, \ldots, \beta_d\}$ bases de trascendencia de K sobre k. Entonces K es algebraico sobre $k(B)$ y sobre $k(B')$.
Dado que α_1 es algebraico sobre $k(B')$, podemos elegir una parte finita

$$C_1 = \{\beta_1, \ldots, \beta_{d_1}\}$$

(si no reenumeramos B') de B' tal que α_1 es algebraico sobre $k(C_1)$ pero no es algebraico sobre $k(C)$ para todo C estrictamente contenido en C_1.
Si $D \subseteq B'$ y α es algebraico sobre $k(D)$, entonces $C_1 \subseteq D$. En efecto, supongamos que $\beta \in C_1$ pero $\beta \notin D$ y $C = C_1 \backslash \{\beta\}$. Dado que C está contenido estrictamente en C_1, α_1 no es algebraico sobre $k(C)$, pero como es algebraico sobre $k(C_1)$, tenemos que β es algebraico sobre $k(\{\alpha_1\} \cup C)$. Por ser α_1 algebraico sobre $k(D)$, β es algebraico sobre $k(C \cup D)$. Pero $\beta \notin D \cup C$ y $\{\beta\} \cup C \cup D \subseteq B'$ es de trascendencia — una contradicción.
Luego $C_1 \subseteq D$ para todo $D \subseteq B'$ tal que α_1 es algebraico sobre $k(D)$.
Sea $B'_1 = \{\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_d\}$. Dado que α_1 es algebraico sobre $k(B')$, existe $1 \leq d_1 \leq d$ tal que α_1 es algebraico sobre $k(\{\beta_1, \ldots, \ldots, \beta_{d_1}\})$, pero no sobre $k(C)$ para cualquier otro $C \subseteq B'$ que no contenga a $\{\beta_1, \ldots, \beta_{d_1}\}$. Entonces α_1 es algebraico sobre $k(\{\beta_1\} \cup \{\beta_2, \ldots, \beta_d\})$ pero β_1 no es algebraico sobre $k(\{\beta_2, \ldots, \beta_d\})$, tenemos que β_1 es algebraico sobre $k(B'_1)$. Luego todos los elementos de B' son algebraicos sobre $k(B'_1)$ y por tanto K es algebraico sobre $k(B'_1)$
Sea $B'_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \ldots, \beta_d\}$. Por una parte α_2 es algebraico sobre

$$k(\{\beta_2\} \cup \{\alpha_1, \beta_3, \ldots, \beta_d\})$$

pero no sobre $k(\alpha_1)$, así que existe un conjunto $C_2 \subseteq B_1'$ tal que α_2 es algebraico sobre $k(C_2)$ pero no sobre $k(C)$ cuando $C \subseteq B_1'$ no contiene a C_2. Como hay al menos un β_i en C_2, podemos reenumerar $\{\beta_2, \ldots, \beta_d\}$ para que $\beta_2 \in C_2$. Por otra parte β_2 no es algebraico sobre $k(\{\alpha_1, \beta_3, \ldots, \beta_d\})$, por que si lo fuese, entonces dado que α_1 no es algebraico sobre $k(\{\beta_3, \ldots, \beta_d\})$, tenemos que α_1 es algebraico sobre $k(\{\beta_2, \ldots, \beta_d\})$, En contradicción con la elección de β_1. Luego β_2 es algebraico sobre $k(B_2')$ y por lo tanto K es algebraico sobre $k(B_2')$.
De esa manera se puede encontrar para cada $i \in \{1, \ldots, c\}$ un conjunto

$$B_i'\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_d\}$$

tal que K es algebraico sobre $k(B_i')$. Por tanto $c \leq d$, y simétricamente, $d \leq c$, lo que implica que los cardinales de B y B' coinciden. $\square$

(2.3.20) Ejemplo. Como un primer ejemplo, si $K = k(x_1, \ldots, x_n)$ es el cuerpo de fracciones del anillo de polinomios en n variables, entonces el grado de trascendencia de K sobre k es n.

(2.3.21) Si B es un dominio de integridad entero sobre el subanillo A, entonces el cuerpo de fracciones de B es algebraico sobre (el cuerpo de fracciones de) A. En efecto, si $b \in B$, $b \neq 0$, entonces existe un polinomio

$$f(x) = x^s + a_1 x^{s-1} + \cdots + a_s \in A[x]$$

tal que $f(b) = 0$ y, dado que B es dominio de integridad, $a_s \neq 0$. Luego

$$(b^{-1})^s + a_s^{-1} a_{s-1} (b^{-1})^{s-1} + \cdots + a_s^{-1} = 0,$$

de donde b^{-1} es entero sobre A.
Por lo tanto, si $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ es una normalización de Noether de $k[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $d = n$, dado que d y n son los grados de trascendencia de los cuerpos de fracciones de $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ y $k[x_1, \ldots, x_n]$ respectivamente.

(2.3.22) Corolario. *Sean $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ todos los ideales primos minimales de la k–álgebra afín A y K_i el cuerpo de fracciones de $A/\mathfrak{p}_i$ para cada i.*

(2.3.22.1) *La dimensión de Krull de A es el máximo de los grados de trascendencia de las extensiones de cuerpos $k \hookrightarrow K_i$ donde $i \in \{1, \ldots, s\}$. Si en particular A es un dominio de integridad con cuerpo de fracciones K, entonces $\dim A = \operatorname{tr} \deg(k \hookrightarrow K)$.*

(2.3.22.2) *Si $\dim A/\mathfrak{p}_i = \dim A/\mathfrak{p}_j$ para $1 \leq i, j \leq s$, entonces*

$$\dim A = h(\mathfrak{p}) + \dim A/\mathfrak{p}$$

para todo $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spec} A$.

Demostración. (1) Dado que $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ son los primos minimales de A, toda cadena maximal de primos de A comenzará en alguno de ellos, y como el supremo de las longitudes de las cadenas de primos de A que empiezan en $\mathfrak{p}_i$ coincide con la dimensión del dominio de integridad $A/\mathfrak{p}_i$, basta probar que si A es un dominio de integridad, entonces su dimensión coincide con el grado de trascendencia de su cuerpo de fracciones.

En efecto, sea $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ una normalización de Noether de A. Entonces la dimensión de A coincide con la de $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$, y el grado de transcendencia del cuerpo de fracciones del anillo de polinomios en d variables es d.

Por otra parte, si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, entonces existe un ideal primo minimal $\mathfrak{p}_i$ tal que $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$. Para cualquier $\mathfrak{p}_i$ tal que $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$, por (2.3.11) la longitud de una cadena maximal que empieza en $\mathfrak{p}_i$ y termina en $\mathfrak{p}$ coincide con $\dim A/\mathfrak{p}_i - \dim A/\mathfrak{p}$. □

(2.3.23) Corolario. *Sea A una k–álgebra afín. El máximo número de elementos de A algebraicamente independientes sobre k coincide con* $\dim A$*. Si B es una subálgebra afín de A, entonces* $\dim B \leq \dim A$.

Demostración. En efecto, si $d = \dim A$, entonces por (2.3.5) existe una normalización de Noether de A, y por (2.3.9) está generada por d elementos algebraicamente independientes sobre k.

Recíprocamente, sean $\beta_1, \ldots, \beta_m \in A$ algebraicamente independientes sobre k, y sean $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ los primos minimales de A (todo ideal I de A tiene un número finito de divisores primos minimales por ser A noetheriano).

Como $k[\beta_1, \ldots, \beta_m]$ es isomorfo al anillo de polinomios en m variables, que es un dominio de integridad, el nilradical de $k[\beta_1, \ldots, \beta_m]$ es cero, esto es,

$$(0) = k[\beta_1, \ldots, \beta_m] \cap \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i = \bigcap_{i=1}^{s} k[\beta_1, \ldots, \beta_m] \cap \mathfrak{p}_i.$$

Además, el cero de $k[\beta_1, \ldots, \beta_m]$ es un ideal primo, así que

$$\mathfrak{p}_i \cap k[\beta_1, \ldots, \beta_m] = (0)$$

para algún $i \in \{1, \ldots, s\}$. Luego $k[\beta_1, \ldots, \beta_m]$ puede ser considerado un subanillo del dominio de integridad $A/\mathfrak{p}_i$, y por (2.3.22.1), si K_i es el cuerpo de fracciones de $A/\mathfrak{p}_i$, entonces

$$m \leq \text{tr deg }_k K_i = \dim A/\mathfrak{p}_i \leq \dim A = d.$$

Si B es una subálgebra afín de A, entonces el mayor número de elementos algebraicamente independientes sobre k de B es menor que el de A. □

(2.3.24) Corolario. *Sea A una k–álgebra afín, con k infinito. Son equivalentes:*

(2.3.24.1) $\dim A = 0$;

(2.3.24.2) *A es un k–espacio vectorial de dimensión finita;*

(2.3.24.3) $\mathbf{Spec}A$ *es finito;*

(2.3.24.4) $\mathbf{Max}A$ *es finito.*

Demostración. Sea $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ un normalización de Noether de A. $\dim A = 0$ si, y sólo si $d = 0$, y esto ocurre si, y sólo si A es finitamente generado como k–espacio vectorial.

Dado que A es entero sobre k y noetheriano, si $\dim A = 0$ por el problema (2.5.2) $\mathbf{Spec}A$ es finito, y por tanto también $\mathbf{Max}A$ es finito.

Recíprocamente, si $\mathbf{Max}A$ es finito, entonces $\mathbf{Max}k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ también es finito. Si $d \neq 0$, entonces por ser k infinito el conjunto de ideales maximales de $k[\alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ contiene al conjunto infinito

$$\{(\alpha_1 - a_1, \ldots, \alpha_d - a_d)\}_{a_1,\ldots,a_d \in k}.$$

Luego $d = 0$. □

(2.3.25) Corolario. *Sea A una k–álgebra afín. Si A es un dominio de factorización única e I es un ideal radical propio no nulo de A, entonces son equivalentes*

(2.3.25.1) $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A - 1$ *para todo divisor primo minimal $\mathfrak{p}$ de I;*

(2.3.25.2) *I es un ideal principal.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Dado que A es dominio de integridad todas las cadenas maximales tienen longitud $\dim A$. Como A es noetheriano, hay un un número finito $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ de divisores primos minimales de I. Por hipótesis,

$$h(\mathfrak{p}_i) = \dim A - \dim A/\mathfrak{p}_i = 1,$$

así que $\mathfrak{p}_i = (p_i)$, donde p_i es un elemento irreducible de A. Luego

$$I = \mathrm{Rad}I = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i = (p_1 \cdots p_s).$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Si I es un ideal principal, pongamos $I = (a)$, entonces $a = p_1 \cdots p_s$ con p_i irreducible para cada i y los divisores primos minimales de I son $\mathfrak{p}_i = (p_i)$, $i \in \{1, \ldots, s\}$. Luego

$$\dim A/\mathfrak{p}_i = \dim A - h(\mathfrak{p}_i) = \dim A - 1$$

para cada i. □

(2.3.26) Proposición. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ un conjunto algebraico afín no vacío.*

(2.3.26.1) $\dim V \leq n$ *y* $\dim V = n$ *si, y sólo si* $V = \mathbb{A}^n k$;

(2.3.26.2) *si todas la componentes irreducibles de V tienen la misma dimensión d, entonces todas las cadenas maximales de variedades no vacías contenidas en V tienen longitud d. Si además V es irreducible, entonces la dimensión de V coincide con el grado de trascendencia de su cuerpo de funciones racionales sobre k;*

(2.3.26.3) *si todas las componentes irreducibles de V tienen la misma dimensión y $W \subset V$ es un cerrado irreducible no vacío, entonces*

$$\dim V = \dim W + \mathrm{codim}_V W;$$

(2.3.26.4) *(k infinito)* $\dim V = 0$ *si, y sólo si V es un conjunto finito;*

(2.3.26.5) *Si V es una variedad tal que $k[V]$ es un dominio de factorización única y $\emptyset \neq W \subset V$ es un conjunto algebraico afín, entonces las componentes irreducibles de W tienen codimensión uno en V si, y sólo si el ideal $I_V(W)$ de $k[V]$ es un ideal principal. En particular, W es una hipersuperficie en $\mathbb{A}^n k$ si, y sólo si todas las componentes irreducibles de W tiene codimensión uno.*

Demostración. (1) La dimensión de V coincide con la del anillo

$$k[x_1, \ldots, x_n]/I(V).$$

El enunciado es consecuencia de que los ideales primos de este anillo están en correspondencia biyectiva con los ideales primos del dominio de integridad $k[x_1, \ldots, x_n]$ que contienen a $I(V)$ y $\dim k[x_1, \ldots, x_n] = n$.
(2) Si las componentes irreducibles de V tienen la misma dimensión d, entonces por (2.3.9) la longitud de todas las cadenas maximales de primos de $k[x_1, \ldots, x_n]/I(V)$ tienen longitud d, y dichas cadenas se corresponden con cadenas maximales de cerrados irreducibles no vacíos contenidos en V.
Si V es irreducible, entonces la dimensión de V coincide con la de la k–álgebra afín y dominio de integridad $k[V]$, que por (2.3.22.1) es el grado de trascendencia de su cuerpo de fracciones $k(V)$ sobre k.
(3) Como la dimensión de las componentes irreducibles no vacías de V es la coaltura de los divisores primos minimales que se corresponden, por hipótesis la dimensión de $k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}_i$ coincide con la de $k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}_j$ para cualesquiera $\mathfrak{p}_i$ y $\mathfrak{p}_j$ entre los finitos divisores primos minimales de $I(V)$, así que por (2.3.22.2), si $\emptyset \neq W \subseteq V$ es un cerrado irreducible, entonces

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim k[x_1, \ldots, x_n]/I(V)\\ &= \dim k[x_1, \ldots, x_n]/I(W) + h(I(W))\\ &= \dim W + \mathrm{codim}_V W.\end{aligned}$$

(4) Si $\dim V = 0$, por (2.3.24) el espectro

$$\mathbf{Spec}(k[x_1, \ldots, x_n]/I(V))$$

es finito, y como por cada punto de V hay un ideal maximal de dicho espectro, V tiene un número finito de puntos. Recíprocamente, si V es finito, entonces $\mathbf{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]/I(V)$ es finito, y por lo tanto $\dim V = 0$.
(5) Consecuencia de (2.3.25). $\square$

(2.3.27) Definición. Un conjunto algebraico afín se dice que es una curva (resp. superficie) algebraica si todas sus componentes irreducibles tienen dimensión uno (resp. dimensión dos).

(2.3.28) Ejemplo. Si k es infinito, todo conjunto algebraico afín lineal es una variedad lineal. Si $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ es una variedad lineal definida por un sistema de ecuaciones de rango r, entonces $\dim V = n - r$.
En efecto, si el sistema de polinomios que define a V es de rango r, existe un cambio afín de coordenadas φ tal que $\varphi(V) = V(x_1, \ldots, x_r)$ (y su dimensión es la misma puesto que un cambio afín de coordenadas φ induce un isomorfismo entre los anillos de coordenadas de V y de $\varphi(V)$). Dado que el anillo de coordenadas de $\phi(V)$ es $k[x_{r+1}, \ldots, x_n]$, la dimensión de V es $n - r$.