Dimensión

2.4. Dimensión de una variedad proyectiva

Sea k algebraicamente cerrado.
Si $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ es un conjunto algebraico afín y $V^* \subseteq \mathbb{P}^n k$ es su clausura proyectiva, entonces la dimensión de V es menor o igual que la de V^*, porque un conjunto algebraico afín es irreducible si, y sólo si, su clausura proyectiva lo es.
Además, dado que la dimensión de $\mathbb{P}^n k$ coincide con la g-dimensión de $k[x_0, \ldots, x_n]$, que es menor o igual que su dimensión de Krull

$$\dim k[x_0, \ldots, x_n] = n + 1,$$

podemos decir que la dimensión de todo conjunto algebraico proyectivo es menor o igual que $n + 1$.

(2.4.1) Proposición. *Si $V \subseteq \mathbb{A}^n k$ es un conjunto algebraico afín y $V^* \subseteq \mathbb{P}^n k$ es su clausura proyectiva, entonces* $\dim V^* = \dim V$.

Demostración. Dado que las clausuras de las componentes irreducibles de V son las componentes irreducibles de V^*, basta probar que la dimensión de una variedad afín coincide con la de su clausura proyectiva.
Si V es una variedad afín de dimensión d y

$$\emptyset \neq V_0 \subset \cdots \subset V_d = V$$

es una cadena maximal de cerrados irreducibles de V, podemos ampliarla hasta obtener una cadena maximal de cerrados irreducibles de $\mathbb{A}^n k$,

$$\emptyset \neq V_0 \subset \cdots \subset V_d = V \subset V_{d+1} \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{A}^n k \ ,$$

que tiene longitud n por (2.3.26.2). Sus clausuras proyectivas forman una cadena

$$\emptyset \neq V_0^* \subset \cdots \subset V_d^* = V^* \subset V_{d+1}^* \subset \cdots \subset V_n^* = \mathbb{P}^n k \ ,$$

donde $V_i^* \neq V_{i+1}^*$ porque si $V_i^* = V_{i+1}^*$, entonces

$$V_i = (V_i^*)_* = (V_{i+1}^*)_* = V_{i+1}.$$

Los ideales primos homogéneos $\mathfrak{q}_i = I(V_I^*)$ constituyen una cadena

$$(0) = \mathfrak{q}_n \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_{d+1} \subset \mathfrak{q}_d \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_0 \neq (x_0, \ldots, x_n) \ .$$

Luego

$$(0) = \mathfrak{q}_n \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_{d+1} \subset \mathfrak{q}_d \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_0 \subset (x_0, \ldots, x_n)$$

es una cadena de ideales primos de longitud $n+1$, y como la dimensión de Krull de $k[x_0, \ldots, x_n]$ es $n+1$, dicha cadena es maximal. Luego la cadena

$$\mathfrak{q}_d \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_0$$

es una cadena maximal de ideales primos homogéneos de $k[x_0, \ldots, x_n]$ que no contienen a $(x_0, \ldots, x_n)$, así que $\dim V^* = g - \dim k[V^*] = d$. □

(2.4.2) Proposición. *Toda cadena de variedades proyectivas no vacías está contenida en una cadena maximal. Las cadenas de variedades proyectivas no vacías maximales de $\mathbb{P}^n k$ tienen longitud n.*

Demostración. Si $V_0 \subset \cdots \subset V_m$ es una cadena de variedades proyectivas distintas no vacías de $\mathbb{P}^n k$, entonces dado que $V_0 \neq \emptyset$, el ideal

$$I(V_0) \not\supseteq (x_0, \ldots, x_n),$$

y por lo tanto podemos suponer (y si no, hacemos un cambio de coordenadas proyectivas) que $x_0 \notin I(V_0)$, es decir, que $V_0 \not\subseteq H_0$, el hiperplano del infinito, y por lo tanto $V_i \not\subseteq H_0$. Luego $((V_i)_*)^* = V_i$ para cada i, y por lo tanto

$$(V_0)_* \subset \cdots \subset (V_m)_*$$

es una cadena de variedades afines distintas, que puede ser refinada hasta obtener una cadena de variedades afines no vacías de longitud n. Las clausuras algebraicas de dichas variedades afines constituyen un refinamiento de longitud n de la cadena $V_0 \subset \cdots \subset V_m$.

Por lo tanto, si $m < n$, entonces la cadena $V_0 \subset \cdots \subset V_m$ no es maximal, y si $m = n = \dim \mathbb{P}^n k$, entonces la cadena $V_0 \subset \cdots \subset V_m$ es maximal. □

(2.4.3) Corolario. *Toda cadena de ideales primos homogéneos del anillo $k[x_0, \ldots, x_n]$ que no contienen a $(x_0, \ldots, x_n)$ puede ser refinada hasta obtener otra cadena de longitud n. La longitud de toda cadena maximal de ideales primos homogéneos de $k[x_0, \ldots, x_n]$ que no contienen a $(x_0, \ldots, x_n)$ es n.*

(2.4.4) Proposición. *Sea n un entero positivo.*

(2.4.4.1) *Si V es un conjunto algebraico proyectivo, entonces* $\dim V \leq n$*, y* $\dim V = n$ *si, y sólo si* $V = \mathbb{P}^n k$*;*

(2.4.4.2) *si V es un conjunto algebraico proyectivo y $C(V)$ es el cono de V, entonces* $\dim C(V) = \dim V + 1$*. Además, si V es una variedad proyectiva, entonces*

$$\dim V = \dim k[V] - 1 = g - \dim k[V];$$

(2.4.4.3) *si todas las componentes irreducibles de V tienen la misma dimensión y $\emptyset \neq W \subseteq V$ es una variedad proyectiva, entonces*

$$\dim V = \dim W + \mathrm{codim}_V W;$$

(2.4.4.4) *una variedad proyectiva V tiene dimensión cero si, y sólo si V es un conjunto finito;*

(2.4.4.5) *un conjunto algebraico proyectivo $V \subseteq \mathbb{P}^n k$ es una hipersuperficie si, y sólo si todas las componentes irreducibles de V tienen codimensión uno en $\mathbb{P}^n k$.*

Demostración. (1) Si V es un conjunto algebrico proyectivo, entonces por (2.4.3), toda cadena de subconjuntos algebraicos irreducibles no vacíos de V puede ser refinada hasta obtener una cadena maximal de longitud n que termina en $\mathbb{P}^n k$. Por lo tanto, $\dim V \leq n$ y si $\dim V = n$, entonces $V = \mathbb{P}^n k$.
(2) Las componentes irreducibles de un cono son conos. Por lo tanto, si

$$\emptyset \neq V_0 \subset \cdots \subset V_d = C(V)$$

es una cadena maximal de cerrados irreducibles de $\mathbb{A}^{n+1} k$, entonces cada V_i es un cono. Como el ideal de $C(V)$ es $I(V)$, la dimensión de $C(V)$ es el supremo de las longitudes de las cadenas de primos homogéneos del anillo graduado $k[x_0, \ldots, x_n]/I(V)$, y que coincide con $1 + g - \dim k[x_0, \ldots, x_n]/I(V)$ porque para la g–dimensión no contamos con el ideal primo $(x_0, \ldots, x_n)/I(V)$.
(4) Sea V un conjunto algebraico proyectivo de dimensión cero. Dado que $(V_*)^* \subseteq V$,tenemos $\dim V_* = \dim (V_*)^* = 0$, y por lo tanto V_* es finito. Como esto ocurre para $\mathbb{A}^n k = U_i$ con $i = 0, \ldots, n$, y $\mathbb{P}^n k = \bigcup_{i=0}^n U_i$, tenemos que V es finito.
Recíprocamente, si V es finito, entonces $\dim V = 0$ porque los únicos cerrados irreducibles no vacíos contenidos en V son los unitarios.
(5) La propiedad es consecuencia de: un ideal homogéneo radical propio no vacío I de $k[x_0, \ldots, x_n]$ es un ideal principal si, y sólo si sus divisores primos minimales son ideales principales generados por polinomios homogéneos.

Esta aserción es cierta, porque si I es principal, entonces I está generado por un elemento homogéneo, y su factores irreducibles también son elementos homogéneos, y los divisores primos minimales de I son los ideales principales generados por dichos factores irreducibles.

Recíprocamente, si los ideales primos minimales de I son $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$, con $\mathfrak{p}_i = (p_i)$, p_i irreducible homogéneo para cada i, entonces

$$I = \mathrm{Rad} I = \bigcap_{i=1}^{s} (p_i) = (p_1 \cdots p_s).$$

□