Bases de Groebner

4.4. Algoritmo de Buchberger

(4.4.1) Definición. Sea "$\leq$" un orden monomial en $k[x_1, \ldots, x_n]$ e I un ideal no nulo de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Se llama ideal inicial de I, y se denota $in_{\leq} I$ al ideal (monomial) generado por

$$\{in_{\leq} f; f \in I\}.$$

(4.4.2) Definición. Sea I un ideal no nulo de $k[x_1, \ldots, x_n]$ y "$\leq$" un orden monomial. El conjunto $\{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq I$ es una base de Groebner de I si

$$in_{\leq} I = (in_{\leq} g_1, \ldots, in_{\leq} g_s).$$

(4.4.3) Proposición. *Todo ideal no nulo I admite una base de Groebner respecto a un orden monomial fijado.*

Demostración. Dado que $inI = (\{inf; f \in I\})$ es monomial, por (4.2.4) existen $g_1, \ldots, g_s \in I$ tales que $inI = (ing_1, \ldots, ing_s)$. $\square$

(4.4.4) Proposición. *Una base de Groebner $\{g_1, \ldots, g_s\}$ del ideal no nulo I para un orden monomial "$\leq$" dado es un sistema generador de I.*

Demostración. En general, $(g_1, \ldots, g_s) \subseteq I$. Supongamos que esta inclusión no es una igualdad, y sea $f \in I \backslash (g_1, \ldots, g_s)$ de exponente inicial el más pequeño posible, esto es,

$$exp_{le} f = \min\{\exp_{\leq} g; g \in I \backslash (g_1, \ldots, g_s)\},$$

que existe porque "$\leq$" es un buen orden.
Como $inf \in inI = (ing_1, \ldots, ing_s)$, existen $h_1, \ldots, h_s$, que podemos suponer que son monomios, tales que

$$inf = \sum_{i=1}^{s} h_i ing_i.$$

Luego

$$h = f - \sum_{i=1}^{s} h_i g_i \in I,$$

con $exph < expf$ y sin embargo $h \notin (g_1, \ldots, g_s)$ porque entonces

$$f \in (g_1, \ldots, g_s).$$

Esto contradice la minimalidad de $expf$, y por lo tanto $I = (g_1, \ldots, g_s)$.

$\square$

(4.4.5) Definición. Una base de Groebner $\{g_1, \ldots, g_s\}$ de I se dice que es minimal si $\{ing_1, \ldots, ing_s\}$ es un sistema minimal de generadores de inI, esto es, tal que

$$ing_i \notin (ing_1, \ldots, ing_{i-1}, ing_{i+1}, \ldots, ing_s)$$

para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$.

(4.4.6) Nota. Sea "$\leq$" un orden monomial. Todo ideal I de $k[x_1, \ldots, x_n]$ no nulo tiene una base de Groebner minimal. En efecto, sea $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ una base de Groebner de I para "$\leq$". Si $ing_1 \in (ing_2, \ldots, ing_s)$, sea $G_1 = G \backslash \{g_1\}$, y si no, sea $G_1 = G$. Definamos recursivamente G_i: si $ing_i \in (ing; g \in G_{i-1})$, sea $G_i = G_{i-1} \backslash \{g_i\}$, y en caso contrario, sea $G_i = G_{i-1}$ para cada $i \in \{2, \ldots, s\}$. El conjunto G_s es una base de Groebner minimal de I.

(4.4.7) Proposición. *Sea J un ideal monomial de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Existe un único sistema generador minimal de I formado por monomios mónicos.*
Sea "$\leq$" un orden monomial e I un ideal no nulo de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Dos bases de Groebner minimales de I tienen el mismo número de elementos y los conjuntos de exponentes iniciales coinciden.

Demostración. Sean $\{\mathbf{x}^{\alpha^1}, \ldots, \mathbf{x}^{\alpha^s}\}$ y $\{\mathbf{x}^{\beta^1}, \ldots, \mathbf{x}^{\beta^t}\}$ dos sistemas generadores minimales de J. Para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, dado que $\mathbf{x}^i \in J$, existe $j \in \{1, \ldots, t\}$ y $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tales que $\alpha^i = \beta^j + \gamma$, y a su vez existe $l \in \{1, \ldots, s\}$ y $\delta \in \mathbb{N}^n$ tales que $\beta^j = \alpha^l + \delta$. Luego $\alpha^i = \alpha^l + \gamma + \delta$, y como el sistema es minimal, $i = l$ y $\gamma = \delta = 0$, con lo que $\alpha^i = \beta^j$. Luego

$$\{\alpha^1, \ldots, \alpha^s\} \subseteq \{\beta^1, \ldots, \beta^t\}.$$

El otro contenido se prueba de forma simétrica.
Sean ahora $\{g_1, \ldots, g_s\}$ y $\{h_1, \ldots, h_t\}$ dos bases de Groebner minimales para el orden "$\leq$". Dado que $\{ltg_1, \ldots, ltg_s\}$ y $\{lth_1, \ldots, lth_t\}$ son sistemas generadores minimales de inI, tenemos que son iguales y por lo tanto que $s = t$.

$\square$

(4.4.8) Nota. En general dos sistemas generadores minimales de un ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ no tienen el mismo número de elementos. Por ejemplo, $\{x\}$ y $\{x+x^2, x^2\}$ son sistemas generadores minimales de (x) y sus cardinales son distintos.

(4.4.9) Definición. Sea "$\leq$" un orden monomial e I un ideal no nulo de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Se define la escalera de I como el conjunto de exponentes iniciales de los polinomios de una base de Groebner minimal de I.

(4.4.10) Proposición. *Sea "$\leq$" un orden monomial. Si I es un ideal no nulo y $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^s\}$ es la escalera de I, entonces*

$$\{expf; f \in I\} = \bigcup_{i=1}^{s} \alpha^i + \mathbb{N}^n$$

(a este conjunto se le denota $expI$).

(4.4.11) Definición. Sea "$\leq$" un orden monomial e $I \neq (0)$ un ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Se dice que una base de Groebner $\{g_1, \ldots, g_s\}$ es reducida si

(4.4.11.1) $g_1, \ldots, g_s$ son mónicos, esto es,

$$ing_i = \mathbf{x}^{expg_i}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$;

(4.4.11.2) si $g_i = \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$, entonces

$$\mathbf{x}^\alpha \notin (ing_1, \ldots, ing_{i-1}, ing_{i+1}, \ldots, g_s)$$

si $c_\alpha \neq 0$.

(4.4.12) Proposición. *Si $\{g_1, \ldots, g_s\}$ y $\{g'_1, \ldots, g'_t\}$ son bases de Groebner reducidas de $I \neq (0)$ para el orden "$\leq$", entonces $\{g_1, \ldots, g_s\} = \{g'_1, \ldots, g'_t\}$.*

Si "$\leq$" es un orden monomial y $\{f_1, \ldots, f_s\}$ es una familia de polinomios, denotaremos por $f\ R\ \{f_1, \ldots, f_s\}$ al resto de la división de f por $f_1, \ldots, f_s$.

(4.4.13) Proposición. *Si $\{g_1, \ldots, g_s\}$ y $\{g'_1, \ldots, g'_t\}$ son bases de Groebner del ideal $I \neq (0)$ para el orden "$\leq$", entonces*

$$f\ R\ \{g_1, \ldots, g_s\} = f\ R\ \{g'_1, \ldots, g'_t\}$$

para todo polinomio f.

Demostración. Sea

$$r = f \ R \ \{g_1, \ldots, g_s\} \ \text{ y } \ r' = f \ R \ \{g'_1, \ldots, g'_t\}.$$

Si $q_1, \ldots, q_s$ y $q'_1, \ldots, q'_t$ son los cocientes de la división, entonces

$$0 = f - f = g_1 q_1 + \cdots + g_s q_s - g'_1 q'_1 - \cdots - g'_t q'_t + (r - r').$$

Luego

$$r' - r = g_1 q_1 + \cdots + g_s q_s - g'_1 q'_1 - \cdots - g'_t q'_t \in I.$$

Si $r \neq r'$, entonces $exp(r' - r) \in \overline{\Delta} \cup \overline{\Delta'}$, y por otra parte,

$$in(r' - r) \in inI = (ing_1, \ldots, ing_s) = (ing'_1, \ldots, ing'_t),$$

luego

$$exp(r' - r) \in \bigcup_{i=1}^{s} \Delta_i \cap \bigcup_{i=1}^{t} \Delta'_i,$$

que es el complementario de $\overline{\Delta} \cup \overline{\Delta'}$.
Luego $r = r'$. $\square$

(4.4.14) Proposición. *Sea $I \neq (0)$ y "$\leq$" un orden monomial. El conjunto $\{g_1, \ldots, g_s\} \in I$ es una base de Groebner de I si, y sólo si $f \ R \ \{g_1, \ldots, g_s\} = 0$ para todo $f \in I$.*

Demostración. Supongamos que $\{g_1, \ldots, g_s\} \in I$ es una base de Groebner de I. Si $f \in I$ y $r = f \ R \ \{g_1, \ldots, g_s\}$, entonces $r \in I$. Si $r \neq 0$, entonces

$$inr \in inI = (ing_1, \ldots, ing_s),$$

y por lo tanto, $exp\, r$, que sabemos que es un elemento de $\overline{\Delta}$, se puede expresar como

$$expg_i + \gamma \in \bigcup_{j=1}^{s} (expg_j + \mathbb{N}^n) = \bigcup_{j=1}^{s} \Delta_j$$

para algún $\gamma \in \mathbb{N}^n$ — una contradicción. Luego $r = 0$.
Recíprocamente, si $f \in I$ y $q_1, \ldots, q_s$ son los cocientes de la división, entonces $f = q_1 g_1 + \cdots + q_s g_s$. Dado que

$$expq_i g_i = expq_1 + expg_i \in \Delta_i$$

para cada i y los conjuntos Δ_i son disjuntos dos a dos, tenemos que la forma inicial de f es

$$inf = inq_i g_i = inq_i ing_i$$

para algún $i \in \{1, \ldots, s\}$, y por lo tanto

$$inf \in (ing_1, \ldots, ing_s).$$

Como inI está generado por $\{inf; f \in I\}$, tenemos que

$$inI \subseteq (ing_1, \ldots, ing_s),$$

y de ahí la igualdad puesto que $g_1, \ldots, g_s \in I$.
Luego $\{g_1, \ldots, g_s\}$ es una base de Groebner. $\square$

(4.4.15) Definición. Sea "$\leq$" un orden monomial y $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Se llama S–polinomio de f y g, y se denota por $f\ S\ g$ a

$$f\ S\ g = b\mathbf{x}^{\gamma-\alpha} f - a\mathbf{x}^{\gamma-\beta} g,$$

donde $expf = \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $expg = \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $inf = a\mathbf{x}^\alpha$, $ing = b\mathbf{x}^\beta$ y $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ con $\gamma_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$.

(4.4.16) Lema. *Sea "$\leq$" un orden monomial. Si $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ y $expf_i = expf_j$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, s\}$, y $f = \sum_{i=1}^s c_i f_i$ con $c_1, \ldots, c_s \in k$ es tal que $expf \leq expf_i$, entonces f es combinación lineal de $\{f_i\ S\ f_j\}_{1 \leq i,j \leq s}$.*

Demostración. Si $\alpha = expf_1 = \cdots = expf_s$ e $inf_i = a_i\mathbf{x}^\alpha$, entonces $\sum_{i=1}^s c_i a_i = 0$ y

$$f_i\ S\ f_j = a_i^{-1} f_i - a_j^{-1} f_j$$

para cada i, j. Entonces

$$\begin{aligned}
f &= c_1 f_1 + \cdots + c_s f_s \\
&= c_1 a_1 (a_1^{-1} f_1 - a_2^{-1} f_2) + c_1 a_1 a_2^{-1} f_2 + c_2 f_2 + \cdots + c_s f_s \\
&= c_1 a_1 (a_1^{-1} f_1 - a_2^{-1} f_2) + (c_1 a_1 + c_2 a_2)(a_2^{-1} f_2 - a_3^{-1} f_3) \\
&\quad + (c_1 a_1 + c_2 a_2) a_3^{-1} f_3 + c_3 f_3 + \cdots + c_s f_s \\
&= c_1 a_1 (a_1^{-1} f_1 - a_2^{-1} f_2) + (c_1 a_1 + c_2 a_2)(a_2^{-1} f_2 - a_3^{-1} f_3) + \cdots \\
&\quad + (c_1 a_1 + \cdots + c_{s-1} a_{s-1})(a_{s-1}^{-1} f_{s-1} - a_s^{-1} f^s) + (a_1 c_1 + \cdots + a_s c_s) a_s^{-1} f_s
\end{aligned}$$

y $(a_1 c_1 + \cdots + a_s c_s) a_s^{-1} f_s = 0$. $\square$

(4.4.17) Teorema. (de Buchberger). *Un sistema generador $\{f_1, \ldots, f_s\}$ del ideal $I \neq (0)$ es una base de Groebner para el orden monomial "$\leq$" si, y sólo si*

$$f_i S f_j\ R\ \{f_1, \ldots, f_s\} = 0$$

para todo $i, j \in \{1, \ldots, s\}$.

Demostración. Dado que $f_i \; S \; f_j \in I$, si $\{f_1, \dots, f_s\}$ es una base de Groebner de I, entonces

$$(f_i \; S \; f_j) R\{f_1, \dots, f_s\} = 0$$

para cada $i, j \in \{1, \dots, s\}$.
Recíprocamente, sea $f \in I$. Dado que $\{f_1, \dots, f_s\}$ es un sistema generador de I, existen $h_1, \dots, h_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ tales que

$$f = g_1 h_1 + \cdots + f_s h_s.$$

Como "$\leq$" es un buen orden, $h_1, \dots, h_s$ pueden ser elegidos tal que

$$\alpha = \max\{exp(h_i f_i) = exp(h_i) exp(f_i); 1 \leq i \leq s\}$$

sea lo menor posible.
Sea

$$T = \{i \in \{1, \dots, s\}; exp(h_i f_i) = \alpha\}$$

e $inh_i = c_i \mathbf{x}^{\alpha^i}$ para $i \in T$.
Si $\exp f = \alpha$, entonces

$$inf = \sum_{i \in T} c_i \mathbf{x}^{\alpha^i} inf_i$$

y por lo tanto $inf \in (inf_1, \dots, inf_s)$.
Si $expf < \alpha$, entonces $\sum_{i \in T} c_i \mathbf{x}^{\alpha^i} inf_i = 0$, y por lo tanto

$$g = \sum_{i \in T} c_i \mathbf{x}^{\alpha^i} f_i$$

es un polinomio tal que

$$expg < exp(\mathbf{x}^{\alpha^i} f_i) = \exp(\mathbf{x}^{\alpha^j} f_j) = \alpha.$$

Por el lema (4.4.16), existen d_{ij} con $i \neq j \in T$ tales que

$$g = \sum_{i \neq j \in T} d_{ij} (\mathbf{x}^{\alpha^i} f_i \; S \; \mathbf{x}^{\alpha^j} f_j).$$

Por hipótesis, $(f_i \; S \; f_j) R\{f_1, \dots, f_s\} = 0$ para todo i, j. Sean $q_1^{ij}, \dots, q_s^{ij}$ los cocientes de la división de $f_i \; S \; f_j$ entre $f_1, \dots, f_s$. Entonces

$$(f_i \; S \; f_j) = q_1^{ij} f_1 + \cdots + q_s^{ij} f_s$$

y

$$exp(f_i\ S\ f_j) = \max\{exp(q_l^{ij} f_l); 1 \leq l \leq s\}.$$

Luego

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}^{\alpha^i} f_i\ S\ \mathbf{x}^{\alpha^j} f_j) &= \frac{\mathbf{x}^{\alpha}}{in(\mathbf{x}^{\alpha^i} f_i)}\mathbf{x}^{\alpha^i} f_i - \frac{\mathbf{x}^{\alpha}}{in(\mathbf{x}^{\alpha^j} f_j)}\mathbf{x}^{\alpha^j} f_j \\ &= \frac{\mathbf{x}^{\alpha}}{inf_i} f_i - \frac{\mathbf{x}^{\alpha}}{inf_j} f_j \\ &= \mathbf{x}^{\alpha-\gamma^{ij}}(f_i\ S\ f_j) \\ &= \mathbf{x}^{\alpha-\gamma^{ij}} q_1^{ij} f_1 + \cdots + \mathbf{x}^{\alpha-\gamma^{ij}} q_s^{ij} f_s,\end{aligned}$$

donde $\gamma^{ij} = (\max\{\beta_1, \delta_1\}, \ldots, \max\{\beta_s, \delta_s\})$, siendo $\beta = expf_i$ y $\delta = expf_j$, y por lo tanto

$$\alpha > exp(\mathbf{x}^{\alpha^i} f_i\ S\ \mathbf{x}^{\alpha^j} f_j) = exp(\mathbf{x}^{\alpha-\gamma^{ij}}(f_i\ S\ f_j)) = \alpha - \gamma^{ij} + exp(f_i\ S\ f_j)$$

$$= \alpha - \gamma^{ij} + \max\{exp(q_l^{ij} f_l); 1 \leq l \leq s\} = \max\{exp(\mathbf{x}^{\alpha-\gamma^{ij}} q_l^{ij} f_l); 1 \leq l \leq s\}.$$

Tenemos entonces que

$$g = \sum_{i\neq j\in T} d_{ij}(\mathbf{x}^{\alpha^i} f_i\ S\ \mathbf{x}^{\alpha^j} f_j) = \sum_{i\neq j\in T} d_{ij}\mathbf{x}^{\alpha-\gamma^{ij}} q_1^{ij} f_1 + \cdots + \mathbf{x}^{\alpha-\gamma^{ij}} q_s^{ij} f_s,$$

y de ahí

$$f = h_1' f_1 + \cdots + h_s' f_s$$

para ciertos $h_1', \ldots, h_s'$, con $\max exp\{h_i' f_i : 1 \leq i \leq s\} < \alpha$ — una contradicción.

Luego $expf = \alpha$ y como hemos visto, $inf \in (ing_1, \ldots, ing_s)$. □

(4.4.18) Algoritmo de Buchberger. Sea "$\leq$" un orden monomial y $F = \{f_1, \ldots, f_s\}$ un sistema generador de $I \neq (0)$. Construyamos recursivamente para $i < j \in \{1, \ldots, s\}$ (dotando al conjunto de esos pares (i, j) del orden lexicográfico de $\mathbb{N}^2$, por ejemplo) añadiéndole a cada F' el polinomio $h = (f_i\ S\ f_j)RF'$ si $h \neq 0$ y comenzando con $F' = F$.

Si el resto de la división de algún S–polinomio de polinomios de F' entre F' no es cero, entonces hacemos lo mismo con F' y obtenemos F''.

El proceso termina con una base de Groebner G en un número finito de pasos. En efecto,

(4.4.19) Ejemplo. Calculemos una base de Groebner para el orden monomial "$\leq_{glex}$" con $x >_{glex} y$ del ideal $I = (x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x) \subseteq k[x, y]$. Sean $f_1 = x^3 - 2xy$, $f_2 = x^2y - 2y^2 + x$ y $F = \{f_1, f_2\}$.

- $f_1\ S\ f_2 = yf_1 - xf_2 = -x^2$.

  El resto de la división de $f_1\ S\ f_2$ entre $\{f_1, f_2\}$ es $-x^2 \neq 0$. Sea $f_3 = -x^2$ y $F = \{f_1, f_2, f_3\}$.

- $f_1\ S\ f_3 = -f_1 - xf_3 = 2xy$.

  El resto es $(f_1\ S\ f_3)R\{f_1, f_2, f_3\} = 2xy \neq 0$. Sea $f_4 = 2xy$ y $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

- $f_1\ S\ f_4 = 2yf_1 - x^2 f_4 = -4xy^2$.

  El resto es $(f_1\ S\ f_4)R\{f_1, \ldots, f_4\} = 0$.

- $f_2\ S\ f_3 = -f_2 - yf_3 = 2y^2 - x$.

  El resto es $(f_2\ S\ f_3)R\{f_1, \ldots, f_4\} = 2y^2 - x$. Sea $f_5 = 2y^2 - x$ y $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$.

- $f_1\ S\ f_5 = 2y^2 f_1 - x^3 f_5 = x^4 - 2xy^3$.

  El resto es $(f_1\ S\ f_5)R\{f_1, \ldots, f_5\} = 0$.

- $f_2\ S\ f_4 = 2yf_2 - xf_4 = -4y^3 + 2xy$.

  $(f_2\ S\ f_4)R\{f_1, \ldots, f_5\} = 0$.

- $f_2\ S\ f_5 = 2yf_2 - x^2 f_5 = x^3 - 4y^3 + 2xy$.

  $(f_2\ S\ f_5)R\{f_1, \ldots, f_5\} = 0$.

- $f_3\ S\ f_4 = 2yf_3 + xf_4 = 0$.

- $f_3\ S\ f_5 = 2y^2 f_3 + x^2 f_5 = -x^3$.

  $(f_3\ S\ f_5)S\{f_1, \ldots, f_5\} = 0$.

- $f_4\ S\ f_5 = yf_4 - xf_5 = x^2$.

  $(f_4\ S\ f_5)R\{f_1, \ldots, f_5\} = 0$.

$F = \{x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x, -x^2, 2xy, 2y^2 - x\}$ es un sistema generador de I (porque $\{f_1, f_2\}$ lo es y $f_i \in I$ para $1 \leq i \leq 5$) y además $(f_i\ S\ f_j)R\ F = 0$ para cada $i < j \in \{1, \ldots, 5\}$. Luego F es una base de Groebner de I para el orden "$\leq_{glex}$".

(4.4.20) Nota. La base de Groebner reducida del ideal $I = (f_1, \ldots, f_p) \neq (0)$ para el orden "$\leq$" se puede calcular siguiendo los siguientes pasos:

1. Calcular una base de Groebner F de I mediante el algoritmo de Buchberger.

2. Extraer una base de Groebner minimal G desechando los elementos de F cuya forma inicial pertenezca al ideal monomial de las formas iniciales de los demás elementos de F.

3. Normalizar la base G, es decir, multiplicar cada polinomio de G por el inverso del coeficiente de la forma inicial para hacerlo mónico.

4. Si $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ es una base de Groebner minimal normalizada, entonces $G' = \{g'_1, \ldots, g'_s\}$, donde

$$g'_i = g_i R\{g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_s\} \in I$$

para cada i, es la base de Groebner reducida.

En efecto, si $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ es una base de Groebner minimal normalizada, entonces $ing_i \notin (ing_1, \ldots, ing_{i-1}, ing_{i+1}, \ldots, ing_s)$ y por lo tanto

$$ing'_i = in(g_i R\{g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_s\}) = ing_i$$

para cada i. Luego $(ing'_1, \ldots, ing'_s) = (ing_1, \ldots, ing_s) = inI$, o sea, G' es una base de Groebner de I que además es normalizada porque G lo es. Por otra parte, por ser g'_i el resto de la división de g_i entre $\{g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_s\}$, si $g'_i = \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ y $c_\alpha \neq 0$, entonces $\alpha \notin \bigcup_{j \neq i} expg_i + \mathbb{N}^n$, con lo que $c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \notin (ing'_1, \ldots, ing'_{i-1}, ing'_{i+1}, \ldots, ing'_s)$.

(4.4.21) Ejemplo. Calcular la base de Groebner reducida del ideal I del ejemplo anterior.
La base de Groebner

$$F = \{f_1 = x^3 - 2xy, f_2 = x^2y - 2y^2 + x, f_3 = -x^2, f_4 = 2xy, f_5 = 2y^2 - x\}$$

no es minimal puesto que por ejemplo $inf_1, inf_2 \in (inf_3, inf_4, inf_5)$. Si desechamos f_1 y f_2, y normalizamos f_3, f_4 y f_5 obtenemos la base de Groebner minimal $G = \{g_1 = x^2, g_2 = xy, g_3 = y^2 - 1/2x\}$. Además, en este caso G es la base reducida porque $-1/2x \notin (ing_1, ing_2)$.

(4.4.22) Ejemplo. Calcular la base de Groebner reducida de $I = (x^3, x^2y - y^3)$ para "$\leq_{lex}$" con $x >_{lex} y$.
Sea $f_1 = x^3$, $f_2 = x^2y - y^3$ y $F = \{f_1, f_2\}$.

- $f_1 \; S \; f_2 = yf_1 - xf_2 = xy^3$.
  $(f_1 \; S \; f_2)R\{f_1, f_2\} = xy^3$. Sea $f_3 = xy^3$ y $F = \{f_1, f_2, f_3\}$.
- $f_1 \; S \; f_3 = y^3 f_1 - x^2 f_3 = 0$.

- $f_2\ S\ f_3 = y^2 f_2 - x f_3 = -y^5$.
  $(f_2\ S\ f_3)R\{f_1, f_2, f_3\} = -y^5 \neq 0$. Sea $f_4 = -y^5$ y $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.
- $f_1\ S\ f_4 = y^5 f_1 + x^3 f_4 = 0$.
- $f_2\ S\ f_4 = y^4 f_2 + x^2 f_4 = -y^7$.
  $(f_2\ S\ f_4)R\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = 0$.
- $f_3\ S\ f_4 = y^2 f_3 + x f_4 = 0$.

Luego $F = \{x^3, x^2y - y^3, xy^3, -y^5\}$ es un base de Groebner de I para "$\leq_{lex}$". Además es minimal, y $G = \{g_1 = x^3, g_2 = x^2y - y^3, g_3 = xy^3, g_4 = y^5\}$ es una base minimal normalizada.

$$g_1' = g_1 R\{g_2, g_3, g_4\} = x^3 \ , \qquad g_2' = g_2 R\{g_1, g_3, g_4\} = x^2y - y^3 \ ,$$

$$g_3' = g_3 R\{g_1, g_2, g_4\} = xy^3 \ , \qquad g_4' = g_4 R\{g_1, g_2, g_3\} = y^5 \ .$$

$G' = \{x^3, x^2y - y^3, xy^3, y^5\}$ es la base de Groebner reducida de I.